Resolución de problemas de geometría con Cabri II

Ricardo Barroso Campos y José María Gavilán Izquierdo

Introducción

Durante mucho tiempo se ha considerado la resolución de problemas como un corolario de la enseñanza de las matemáticas. Desde mediados de los ochenta, con los trabajos de Schoenfeld (1985), como señalan Davis y Hersh (1989), vuelven a adquirir actualidad las ideas de Polya (1965) sobre el papel de la heurística en la resolución de problemas. Hoy día la resolución de problemas no aparece aislada en el currículum, sino integrada en las distintas áreas de las matemáticas.

Desde la perspectiva de la educación matemática, la incorporación de los programas de ordenador, entendemos que ofrece un impulso para ampliar y mejorar las estrategias heurísticas en la resolución de problemas. Un ejemplo viene dado por las posibilidades que brindan los programas basados en la «geometría dinámica», ya que la herramienta de arrastre posibilita la formulación/verificación de conjeturas o la construcción de contraejemplos que permiten el rechazo/modificación de las mismas.

En un problema, como ocurre con las matemáticas y las ciencias en general, podemos distinguir dos momentos que son, el de exploración/descubrimiento, y el de la justificación/validación (Piaget y García, 1982). En el primer momento, el resolutor utiliza todas aquellas estrategias heurísticas de que dispone para la elaboración de una conjetura, que es una afirmación que le parece plausible, y que puede ser aceptada o rechazada. En este último caso puede proceder a modificarla. En el segundo momento, intenta buscar y dar argumentos para un razonamiento que la certifique.

En relación a la clasificación de problemas de Polya (1965) si el momento preponderante es el de justificación, estaríamos ante "un problema por demostrar"; cuando está presente el momento de exploración, estamos ante un "problema por resolver".

En este trabajo queremos mostrar qué papel juegan los programas de geometría dinámica para el desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Nos centraremos esencialmente en el momento de la exploración/descubrimiento. Aunque también juegan un papel importante en el segundo momento.

Software dinámico para geometría

Actualmente en el campo de la educación matemática hay disponible una gran variedad de programas de ordenador que pueden incorporarse al aula de matemáticas. Si bien este software tiene gran variedad, así podemos citar los programas de cálculo simbólico, como Derive, las hojas de cálculo, como Excel, programas de estadística, como SPSS; nos vamos a centrar en este trabajo en los programas que se agrupan bajo la denominación de "programas de geometría dinámica", como Cabri II (http://www-cabri.imag.fr/), Cinderella (http://www.cinderella.de/), GEUP (http://www.geup.net/), etc. Hemos elegido en este caso Cabri II.

Los dos aspectos claves de estos programas son:

- la construcción de figuras geométricas, y
- la posibilidad de arrastre de las mismas.

Una figura se realiza utilizando las propiedades euclídeas que el programa ofrece a través de las herramientas que incorpora o bien que son creadas por el usuario (normalmente denominadas macroconstrucciones). Por ejemplo, para trazar una recta perpendicular a un segmento que pase por un punto (bien que ya esté construido o que se construya durante el uso de la herramienta), debemos utilizar la herramienta «recta perpendicular». Cuando se arrastre cualquier punto básico de la construcción o el mismo segmento, la recta sigue siendo perpendicular. En otro caso tendrá solamente la apariencia de ser perpendicular y al arrastrarse alguno de sus elementos (puntos básicos o segmento) dejará de ser perpendicular.

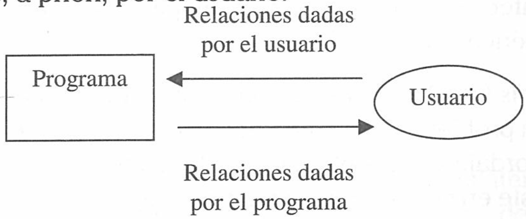
Cuando con los programas de geometría dinámica construimos una figura, por ejemplo un triángulo equilátero, ésta representa a toda la clase, en nuestro caso, a todos los triángulos equiláteros, sin más que "arrastrar" los puntos básicos.

Para Goldenberg y Cuoco (1998) los programas de geometría dinámica permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción (figura), mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observando cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones.

Consideramos que al utilizar estos programas se establecen relaciones geométricas de tipo explícito del siguiente modo.

-**relaciones explícitas del usuario**: para hacer una figura el usuario debe indicar al programa las propiedades euclídeas de la misma a través de las herramientas propias del programa o las definidas por el usuario (macros).

- **relaciones explícitas del programa:** dada una figura, además de las relaciones establecidas por el usuario, aparecen otras relaciones que se deducen de las anteriores. Por ejemplo, dado un triángulo y sus tres medianas, construidos como figura, se deduce que se cortan en un punto (baricentro). De esta forma el programa hace explícitas esas relaciones no conocidas, a priori, por el usuario.



Los programas como Cabri II, además, proporcionan más herramientas para la indagación e investigación de relaciones geométricas. Algunos ejemplos son los siguientes:

- La posibilidad de incorporar animaciones a las figuras. Las herramientas que lo posibilitan son Animación y Animación múltiple del cuadro de herramientas Ver.
- La posibilidad de visualizar las trazas de un punto.
- La posibilidad de comprobar determinadas relaciones geométricas de forma automática, tales como paralelismo, equidistancia, etc.

Desarrollo de estrategias heurísticas a través del software

Como hemos señalado antes, los programas de geometría dinámica potencian el desarrollo de estrategias heurísticas para la resolución de problemas, por ejemplo hemos señalado antes, las animaciones, comprobación de propiedades; y como veremos más adelante, la particularización y la creación de tablas para la búsqueda de patrones. Polya (1965) utiliza el término heurística para referirse al estudio de las reglas y de los métodos del descubrimiento y de la invención, señalando que desde una perspectiva moderna, trata de comprender el método que conduce a la resolución de problemas, en particular *las operaciones mentales típicamente útiles* en este proceso.

Las estrategias heurísticas no garantizan efectividad para resolver un problema, a pesar de que en determinadas situaciones hayan tenido éxito, lo que las diferencia de los algoritmos, que sí la garantizan.

Un ejemplo de estrategia heurística para resolver un problema puede ser particularizar. Polya (1965) en su "breve diccionario de heurística" define la particularización en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dados a la consideración de un conjunto más pequeño o incluso de un solo objeto contenido en el conjunto dado.

Otras estrategias heurísticas que vamos a considerar son, trazar líneas auxiliares y confeccionar tablas de valores para obtener relaciones de naturaleza numérica (patrones).

Para Mason y Cols (1989) esta estrategia es una buena manera de empezar a resolver un problema, es un proceso que permite la transición entre las fases de abordaje del problema y la de ataque para su resolución. Para ellos consiste en concentrarse en algunos ejemplos, para entre otras cosas, entender mejor el significado de la pregunta.

Mason y Cols (1989) consideran diversas formas de particularización, en función del objetivo de dicha particularización: aleatoria, sistemática e ingeniosa.

- de forma aleatoria, para entender el significado
- sistemática para preparar el terreno a la generalización, e
- ingeniosa, para comprobar la generalización.

Y por lo tanto, condicionan la forma de escoger ejemplos concretos.

Veamos a continuación algunos ejemplos de particularizaciones, en las que tendremos en cuenta lo anterior para el caso de un problema geométrico. Indicaremos cómo realizamos la particularización teniendo cuenta los distintos "objetos matemáticos" que intervienen. Veremos que al particularizar aparecen distintos grados de libertad para realizar la misma.

Dado un triángulo, ABC, tracemos por su baricentro G, una recta r. Demostrar que la suma de distancias a la recta de los vértices situados en el mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a la recta. La figura es la siguiente (Ilustración 1):

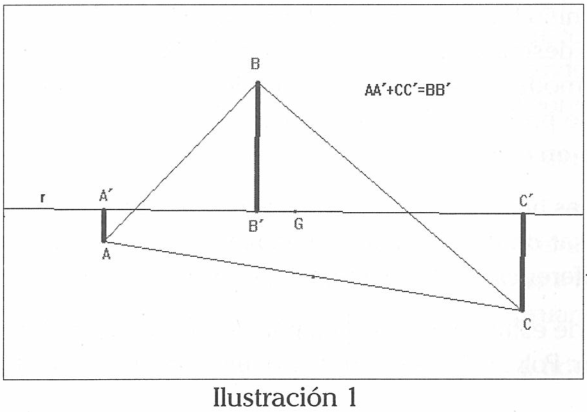


Ilustración 1

En este problema (Velasco, 1983) la particularización puede realizarse tanto sobre el triángulo como sobre la recta, con lo cual podemos decir que tenemos dos grados de libertad que son independientes. Veremos que la particularización puede considerar los casos límite para los distintos objetos, Hay que indicar que esos *casos límite* no son únicos y por lo tanto caben diversas particularizaciones.

Particularización sistemática.

Para ello consideramos un triángulo isósceles no equilátero (primera elección en grados de libertad) y la recta paralela al lado desigual (segundo grado de libertad). Con software dinámico obtenemos la siguiente figura (Ilustración 2):

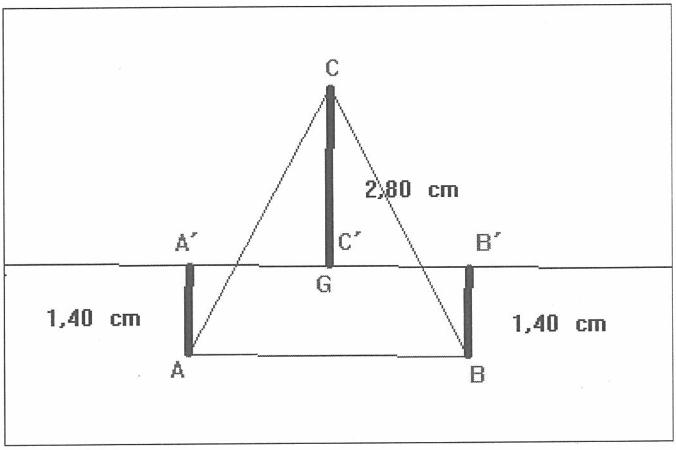


Ilustración 2

Por tanto puede obtenerse la siguiente relación: el baricentro divide a la mediana en una proporción 2::1. Cabe preguntarse sobre la validez de esa relación para otro tipo de triángulos. Con este ejemplo de particularización sistemática, que incluye casos límite, observamos que el problema mismo es la relación.

La posibilidad de "arrastre" en las figuras de Cabri, o de cualquier software de geometría dinámica, nos permite comprobar que la relación no depende del triángulo isósceles concreto ni de la recta paralela específica elegida.

Puede elegirse en este caso de particularización sistemática otro caso límite como es el del triángulo equilátero.

Particularización sistemática-aleatoria

Para responder a la cuestión anterior, vamos a particularizar de manera aleatoria para el triángulo (uno de los grados de libertad) y manteniendo la recta paralela a uno de los lados. En este caso concreto la figura resultante es la siguiente (Ilustración 3).

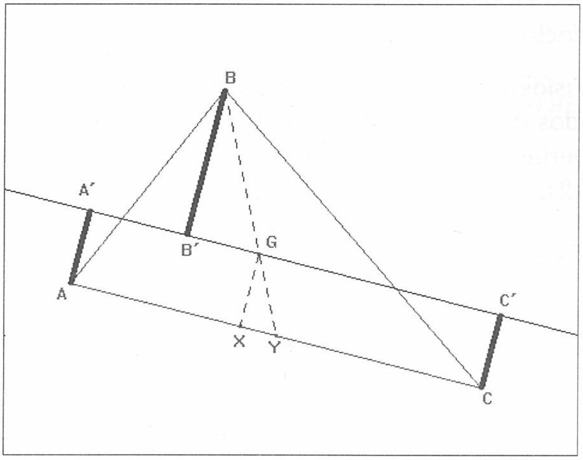


Ilustración 3

Con este caso se pone de manifiesto otra estrategia heurística importante en el caso de la geometría: el uso de líneas auxiliares que facilitan la resolución del problema, o al menos la obtención de relaciones. En este caso, trazando la mediana a uno de los lados (el paralelo a la recta) y un segmento perpendicular al mismo por el baricentro, se obtienen dos triángulos semejantes de razón 2. Y por tanto la relación de las longitudes de los segmentos en que divide el baricentro a la mediana sigue siendo 2::1.

Particularización aleatoria.

Considerando un triángulo cualquiera y una recta cualquiera en nuestro problema, usando el software, podemos llegar a establecer la relación entre las longitudes de los segmentos en que el baricentro divide a la mediana. La relación es 2::1.

Con esa relación puede abordarse la solución del problema planteado. Para el caso de la estrategia basada en la confección de tablas (por ejemplo, para buscar un patrón numérico), podemos considerar el mismo problema pero con pregunta abierta de tipo siguiente:

Dado un triángulo, ABC, tracemos por su baricentro G, una recta r. ¿Qué relación guardan las distancias de los vértices situados en el mismo semiplano a la recta con la distancia del tercer vértice a la recta?

En la siguiente figura (Ilustración 4) podemos comprobar cómo una tabla de valores nos puede sugerir la relación pedida.

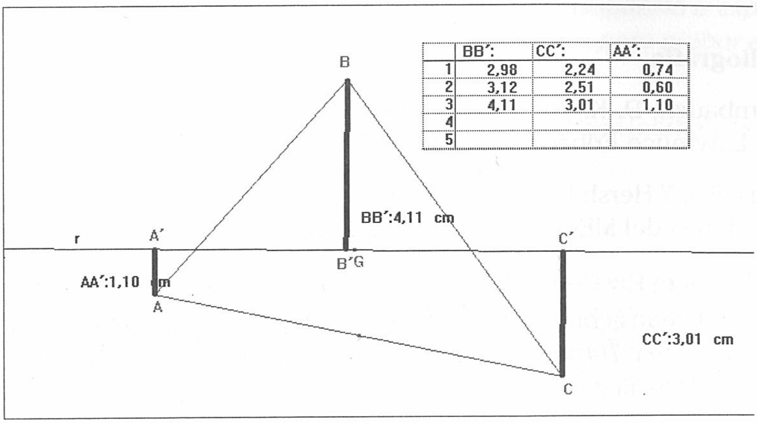


Ilustración 4

Implicaciones para la enseñanza

Desde finales de los ochenta una parte de la comunidad de educadores matemáticos (VVAA, 1987; NCTM, 1989; Kaput 1992) considera que la tecnología debe ser incorporada a las aulas de matemáticas de todos los niveles y que puede jugar un papel importante.

La forma y papel que pueden desempañar depende de varios factores, del software específico y del uso que se haga del mismo. La simple elección de un programa u otro condiciona el contenido matemático y la forma de abordarlo.

Según Brumbaugh y Rock (2001), introducir el descubrimiento en los grados medios de enseñanza puede ser muy efectivo; el uso de programas de geometría dinámica puede conducir al descubrimiento. En niveles diferentes también es posible y deseable considerar el descubrimiento como parte integrante del contenido matemático. En este documento hacemos una propuesta para llevar a cabo esta meta.

Podemos trasladar la propuesta realizada para el desarrollo de estrategias a otros problemas y llevarla al aula. Para terminar planteamos un problema que se presta para llevar a cabo con él la misma experiencia que planteamos en el apartado anterior, el teorema de Varignon.

El teorema de Varignon de cuadriláteros y paralelogramos, se enuncia del siguiente modo dejando abierta la pregunta: *Dado un cuadrilátero ABCD, tomemos consecutivamente los puntos medios de los lados, PQRS. ¿Qué tipo de cuadrilátero obtenemos? ¿Cómo es el cuadrilátero PQRS cuando ABCD es un paralelogramo, rectángulo... ?*

Bibliografía

Brumbaugh, D. K. y Rock, D. (2001): *Teaching Secondary Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah.

Davis, P. J. Y Hersh R. (1988): *Experiencia Matemática*. Centro de Publicaciones del MEC- Editorial Labor. Barcelona.

Goldemberg P. y Cuoco A. (1998): "Dynamics Geometry as a bridge from Euclidean geometry to Analysis", en King J. y Schattschneider D. (Edts) *Geometry Turned On. Mathematical association of America*, (notes 41), Washington, D.C.

Kaput, J. (1992): "Technology and Mathematics Education". *En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Grows D. A. (ed) NCTM,.Reston.

Mason, J.; Burton, L. Y Stacey K. (1988): *Pensar matemáticamente.* Centro de Publicaciones del MEC- Editorial Labor. Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics (1989): *Currículum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston.

Piaget, J. Y García, R. (1982): *Psicogénesis e historia de las Ciencias*. Siglo XXI Editores, México.

Polya, G. (1965): *How to solve it*. Princenton University Press (Traducción: Cómo plantear y resolver problemas, de Julián Zugazagoitia Ed. Trillas. México)

Schoenfeld, A. H.(1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando

VV AA (1987): *Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90.* Simposio de Valencia. Mestral Libros. Valencia.

Velasco, G. (1983): *Tratado de Geometría*. Editorial LIMUSA, México.

Ricardo Barroso Campos y José María Gavilán Izquierdo. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.
Correo electrónico: (rbarroso@us.es) (gavilan@us.es)