Modelos matemáticos en la planificación de proyectos

**David Alcaide López de Pablo, Carlos González Martín
y Antonio Sedeño Noda**

Resumen

En este trabajo se plantea la necesidad de dar a conocer, en los últimos cursos de secundaria, contenidos sobre algunos problemas de tipo combinatorio, los modelos matemáticos correspondientes y, en su caso, algún método de resolución fácil de aplicar. La ilustración elegida para cumplir con este propósito es la de los problemas de planificación de proyectos, muy importantes en aplicaciones económicas, de organización y gestión, de las ingenierías, etc., y, por tanto, de mucho interés para motivar su estudio y resolución.

1. Introducción

Ayudar a tomar decisiones de forma científica, a partir del uso de modelos matemáticos, es la característica esencial de la Investigación Operativa. El proceso que conlleva el desarrollo de esta ciencia conecta las Matemáticas con el análisis y resolución de una gama amplia de problemas del mundo real. Términos como programación, optimización, planificación,... son habituales en Investigación Operativa, asumiendo el protagonismo que impone el manejo de los problemas reales que se intentan resolver bajo la forma de los correspondientes modelos matemáticos.

Un grupo importante de problemas propios de la Investigación Operativa presentan la particularidad de una gran sencillez de planteamiento y una relativa facilidad para ser formalizados matemáticamente. En estos casos suele ser habitual que aparezcan problemas de optimización cuya resolución, en ocasiones, pueda acometerse utilizando algoritmos eficientes y no muy difíciles de aplicar. Su estudio permite ahondar en la idea de conexión entre las Matemáticas y la realidad, poniendo en evidencia su validez para entender, analizar y resolver eficazmente problemas importantes del mundo real.

El término *planificación* está presente en multitud de actividades económicas, organizativas, políticas, etc. Los gobiernos planifican las actuaciones económicas, los repartos presupuestarios, las políticas de em-

Números.
Volumen 51, septiembre de 2002, páginas 39-49

pleo, educativas,...; las empresas planifican sus políticas de inversiones, la contratación de sus empleados, la ejecución de proyectos, etc.

Desde los anteriores planteamientos es fácil inferir que la Investigación Operativa contiene una parte dedicada al estudio de los problemas de planificación. Así, el título Planificación se entiende que se conforma a partir de un conjunto de problemas, modelos y técnicas de resolución de los problemas de optimización que le son inherentes, como un área de trabajo de importancia creciente dentro de la Investigación Operativa.

Se puede considerar que entre los casos más sencillos de problemas de planificación están los referidos a la ejecución de un proyecto con un determinado número de trabajos o tareas en un orden preestablecido. Conocidos los tiempos necesarios para realizar cada trabajo, interesa determinar el tiempo mínimo en el que se ejecutará el proyecto. A este tipo de problemas, denominados de *camino crítico*, dedicaremos este trabajo. Ilustraremos su planteamiento y resolución, haciendo énfasis en su carácter de problemas combinatorios de solución relativamente sencilla y conectados con situaciones reales desde las que es fácil motivar el uso de las Matemáticas.

Estamos convencidos de la necesidad de introducir el manejo de grafos y redes en los últimos cursos de la enseñanza secundaria. La utilidad del trabajo con los correspondientes problemas de naturaleza combinatoria se ve reforzada y favorecida, en un número importante de casos, por la sencillez de motivación, la poca dificultad de formalización en lenguaje matemático y la relativa facilidad de resolución. Además, evidencian la necesidad de revisión de las técnicas para calcular y contar con el fin de adaptarlas, en los casos que correspondan, al uso imprescindible de las herramientas computacionales adecuadas.

2. Problemas de camino crítico

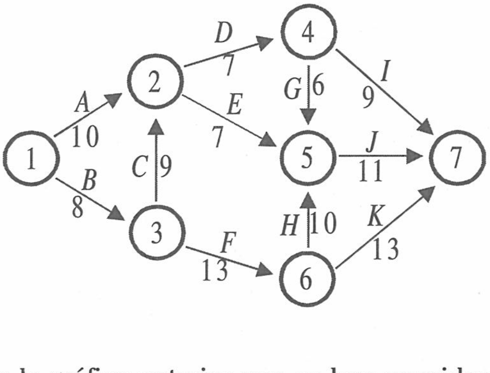
La ejecución de un determinado proyecto implica la realización de once tareas o trabajos (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J y K) según la duración y precedencias especificadas en la siguiente tabla:

TRABAJO	PRECEDENCIA	DURACIÓN (DÍAS)
A	-	10
B	-	8
C	B	9
D	A, C	7
E	A, C	7
F	B	13
G	D	6
H	F	10
I	D	9
J	E, G, H	11
K	F	13

Se quiere determinar el tiempo mínimo en que se puede ejecutar el proyecto.

3. Red del proyecto

El proyecto anterior se puede formalizar sobre una red dirigida y sin ciclos, en la que los vértices representan estados de desarrollo del proyecto (conocidos como eventos o sucesos) que, una vez alcanzados, nos permiten comenzar una o varias tareas. Los arcos conectan eventos y se corresponden con las diferentes actividades, tareas o trabajos. La correspondiente red acíclica dirigida para el proyecto del ejemplo anterior es:



Se observa en la gráfica anterior que se han considerado siete eventos, sucesos o estados de desarrollo del proyecto que son los vértices de la red. Así, por ejemplo, el vértice 1 representa el estado inicial en el que todavía no se ha comenzado a realizar ninguna de las actividades del proyecto, y el vértice 7 representa el estado final en el que se han completado todas las actividades. Como hemos indicado previamente, cada arco se identifica con un trabajo o actividad y aparece acompañado de la duración correspondiente.

El ejemplo introducido es básico y típico para plantear un problema de camino crítico y es un sencillo caso de problema de planificación de tareas. Cuando, como en el caso que nos ocupa, el conjunto de soluciones posibles es discreto, las técnicas de Planificación desarrolladas para resolver estos problemas son, obviamente, técnicas de Optimización Combinatoria.

En la resolución del ejemplo anterior usaremos técnicas consideradas clásicas, conocidas por sus denominaciones anglosajonas como CPM (Critical Path Method) y PERT (Program Evaluation and Review Technique). Estas dos técnicas, aunque con muchos aspectos en común, fueron desarrolladas independientemente. En el primer caso, su desarrollo tuvo lugar en una empresa privada. Por su parte, la implantación del método PERT se inició a finales de la década de los cincuenta para coordinar y controlar las numerosas actividades necesarias en el desarrollo de un proyecto de construcción de misiles balísticos por parte de la Armada de los Estados Unidos de Norteamérica. En la actualidad, la diferencia sustancial entre las dos técnicas anteriores consiste en la manera diferente en que cada una de ellas asigna los tiempos de duración de las actividades. Mientras que el método PERT permite la incorporación de incertidumbre a los tiempos de duración de los trabajos, el método CPM necesita conocer con precisión dichos tiempos (podría trabajar también con una estimación única del tiempo de duración de cada trabajo). En lo sucesivo nos centraremos en la aplicación de la técnica CPM (Método de Camino Crítico).

4. Método de camino crítico

Utiliza la estructura de la red del proyecto para asignar tiempos máximos y mínimos para la ocurrencia de los distintos eventos; es decir, los tiempos mínimos en los que se pueden alcanzar los diferentes estados de desarrollo del proyecto y los tiempos máximos en que dichos estados deben alcanzarse para que el proyecto en su conjunto no se retrase. El tiempo mínimo asociado a un evento no puede ser menor que el necesario para que se ejecuten todos los trabajos anteriores a dicho evento. Por su parte, una vez fijado el tiempo máximo correspondiente al evento último (igual al tiempo mínimo de dicho evento), el tiempo máximo de cada uno de los restantes eventos debe calcularse como el tiempo máximo que permite la ejecución de todos los trabajos posteriores dentro de la estructura jerárquica de la red del proyecto. *Aquellos eventos en los que coincide el tiempo mínimo y máximo son* ***críticos***. Algunos de los trabajos que conectan eventos críticos son también trabajos o actividades críticas. El adjetivo "crítico" habrá de entenderse en el sentido de que cualquier retraso en la correspondiente ejecución implica un retraso en la duración del proyecto. Los tiempos mínimo y máximo del último evento son coincidentes y establecen la duración mínima del proyecto. *Los trabajos críticos describen un camino dirigido que conecta los vértices primero y último denominado* ***camino crítico*** *que, en términos de las duraciones de los trabajos, tiene longitud total máxima.* La longitud del camino crítico coincide con la duración mínima del proyecto y garantiza la ejecución de todas sus actividades.

5. Aplicación al anterior ejemplo

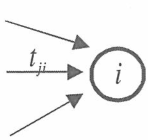
Para calcular el tiempo mínimo asociado a cada evento, se fija este tiempo en cero para el evento 1 y se asciende sobre la red del proyecto para calcular los correspondientes tiempos mínimos para el resto de eventos. Notaremos por $U_1 = 0$ al tiempo mínimo en el que puede darse el evento 1. Si ascendemos sobre la red, nos damos cuenta de que el evento 2 no puede ocurrir antes de que trascurran 10 días (duración del trabajo A) ni antes de que pasen 9 días (duración del trabajo C) después del tiempo mínimo asociado al evento 3. Como este último tiempo no lo conocemos, debemos hallarlo previamente. Así, $U_3 = 8$ es la duración del trabajo B. Entonces, para calcular U_2 deberemos tener en cuenta lo anteriormente argumentado para concretar que
$U_2 = \text{máx } \{10, 8 + 9\} = 17$ Siguiendo con esta forma de actuar,

$$U_4 = 17 + 7 = 24, \quad U_6 = 8 + 13 = 21$$

$$\text{y } U_5 = \text{máx } \{24 + 6, 17 + 7, 21 + 10\} = 31$$

Por último, $U_7 = \text{máx } \{24 + 9, 31 + 11, 21 + 13\} = 42$

En resumen, para calcular el tiempo mínimo asociado a un evento *i* debemos tener presente los valores de los tiempos mínimos (U_j) correspondientes a los eventos inmediatamente anteriores (predecesores) y la duración de los trabajos (t_{tj}) que conectan estos eventos con el evento *i*. Con esto:

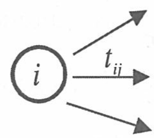


$$U_i = \max_{j \text{ predecesor de } i} \{U_j + t_{ji}\}$$

Para calcular los tiempos máximos de los eventos (V_i), comenzamos fijando $V_7 = U_7 = 42$. Los restantes tiempos máximos los determinamos utilizando una búsqueda "hacia detrás" sobre la red del proyecto, garantizando la ejecución de los trabajos posteriores. De esta manera:

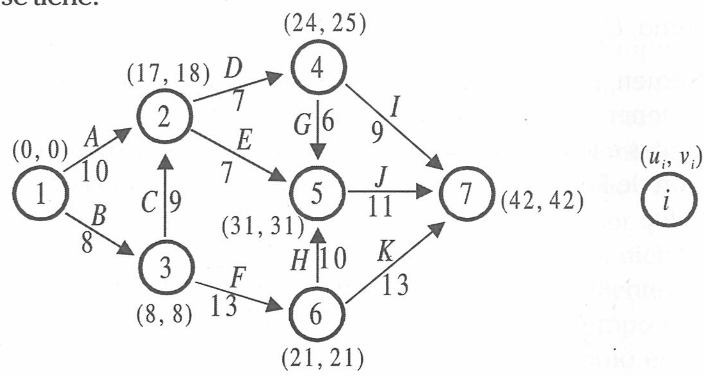
- $V_5 = 42 - 11 = 31$ (el tiempo máximo asociado al evento 5 debe garantizar la ejecución del trabajo J).
- $V_4 = \text{mín}\ \{V_5 - 6,\ V_7 - 9\} = \text{mín}\ \{25,\ 33\} = 25$ (el tiempo máximo correspondiente al evento 4 debe garantizar la ejecución de los trabajos I y G.
- $V_6 = \text{mín}\ \{42 - 13, 31 - 10\} = 21$ (el tiempo máximo asociado a 6 debe permitir la ejecución posterior de los trabajos H y K).
- $V_2 = \text{mín}\ \{31 - 7, 25 - 7\} = 18$ (el tiempo máximo del evento 2 permitirá la ejecución de los trabajos D y E).
- $V_3 = \text{mín}\ \{18 - 9, 21 - 13\} = 8$ (el tiempo máximo asociado al evento 3 permitirá la ejecución de los trabajos C y F).
- $V_1 = \text{mín}\ \{18 - 10, 8 - 8\} = 0$ (el tiempo máximo asociado al evento 1 permitirá la ejecución de los trabajos A y B).

Por tanto, para calcular el tiempo máximo asociado a un evento i debemos tener presente los valores de los tiempos máximos (V_j) correspondientes a los eventos inmediatamente posteriores (sucesores) y la duración de los trabajos (t_{ij}) que conectan el evento i con aquellos. Es decir:



$$V_i = \underset{j\ sucesor\ de\ i}{\text{mín}} \{V_j - t_{ij}\}$$

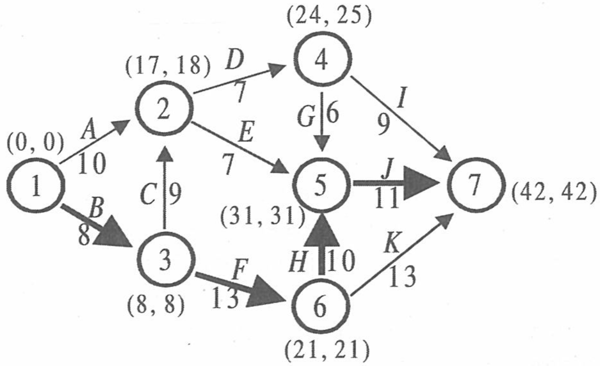
Gráficamente, si a cada evento le asociamos su tiempo mínimo y su tiempo máximo, se tiene:



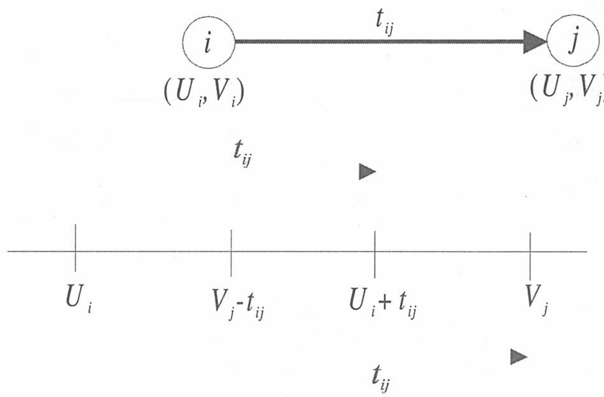
5.1 Eventos y caminos críticos

Por lo razonado con anterioridad, es admisible el calificativo de crítico a todo evento en el que coincidan el tiempo mínimo y el tiempo máximo asociados. En el ejemplo anterior son críticos los eventos 1, 3, 6, 5 y 7 y el camino crítico (en este caso único) está determinado por los trabajos B, F, H y J.

EVENTO	U_i	V_i	HOLGURA	
1	**0**	**0**	**0**	**Crítico**
2	17	18	1	No crítico
3	**8**	**8**	**0**	**Crítico**
4	24	25	1	No crítico
5	**31**	**31**	**0**	**Crítico**
6	**21**	**21**	**0**	**Crítico**
7	**42**	**42**	**0**	**Crítico**



Las diferencias entre los tiempos máximos y mínimos correspondientes a los diferentes eventos, definen unas holguras que posibilitan ciertos retrasos en la ejecución de los trabajos anteriores o ciertos adelantos en los trabajos posteriores, sin que afecte a la duración total del proyecto. Podríamos, por tanto, también hablar de tiempos mínimos y máximos asociados al comienzo y terminación de cada trabajo. Es claro que lo más pronto que puede comenzar la ejecución de un trabajo (tiempo mínimo de comienzo), es cuando ha transcurrido el tiempo mínimo asociado al evento del que parte el trabajo sobre la red del proyecto. También, es evidente que lo más tarde que puede acabar la ejecución de un trabajo (tiempo máximo de terminación) debe coincidir con el tiempo máximo asociado al evento al que llega dicho trabajo sobre la red del proyecto. Por su parte, lo más tarde que puede comenzar la ejecución de un trabajo (tiempo máximo de comienzo) debe coincidir con la diferencia entre el tiempo máximo asociado al evento al que llega sobre la red del proyecto, menos la duración de dicho trabajo. Por último, lo más pronto que puede concluir la ejecución de un trabajo (tiempo mínimo de terminación) coincidirá con la suma del tiempo mínimo asociado al evento del que parte sobre la red del proyecto (lo más pronto que puede comenzar a realizarse el trabajo), más la propia duración de dicho trabajo. La siguiente gráfica ilustra estos comentarios:



Para un trabajo que conecta los eventos i y j y tiene duración igual a t_{ij}, *se tiene que el tiempo mínimo de comienzo es igual a* U_i, *el tiempo máximo de comienzo es* $V_j - t_{ij}$, *el tiempo mínimo de terminación es* $U_i + t_{ij}$ *y el tiempo máximo de terminación es* V_j. *Las holguras entre los tiempos máximos y mínimos de comienzo y terminación (mayores o iguales a cero) serán iguales e indicarán cuándo los trabajos son o no críticos.*

*Para el ejemplo que hemos utilizado anteriormente, los correspondientes cálculos aparecen en la siguiente tabla (***tabla del proyecto***):*

Trabajo	Precedencia	Duración (días)	T° min C.	T° max C.	T° min T.	T° max T.	Holgura	
A	-	10	0	8	10	18	8	NC
B	-	**8**	**0**	**0**	**8**	**8**	**0**	**C**
C	B	9	8	9	17	18	1	NC
D	A, C	7	17	18	24	25	1	NC
E	A, C	7	17	24	24	31	7	NC
F	**B**	**13**	**8**	**8**	**21**	**21**	**0**	**C**
G	D	6	24	25	30	31	1	NC
H	**F**	**10**	**21**	**21**	**31**	**31**	**0**	**C**
I	D	9	24	33	33	42	9	NC
J	**E, G, H**	**11**	**31**	**31**	**42**	**42**	**0**	**C**
K	F	13	21	29	34	42	8	NC

De la tabla anterior se deduce claramente que los trabajos A, C, D, E, G, I, y K no son críticos, estableciendo la correspondiente holgura en el margen disponible para su ejecución sin que se retrase el proyecto global. A título de ejemplo, se observa que el trabajo A puede empezar a ejecutarse hasta 8 días después de iniciarse el proyecto.

6. Comentarios sobre la eficiencia del método

El método que hemos aplicado para el cálculo de la duración óptima de un proyecto y de los tiempos mínimos y máximos de comienzo y finalización de cada uno de los trabajos o actividades que lo componen, es eficiente desde el punto de vista computacional. Se observa que se hace necesario calcular los tiempos mínimos y máximos de cada uno de los eventos que intervienen en el proyecto, es decir, de cada uno de los vértices de la red del proyecto. El tiempo mínimo (respectivamente el tiempo máximo) de cada uno de esos vértices es el máximo entre tantas cantidades como predecesores tiene el vértice (respectivamente el mínimo entre tantas cantidades como sucesores tiene el vértice); y dichos máximos y mínimos pueden calcularse rápidamente (lo que en términos más técnicos de complejidad computacional se denomina "tiempo polinomial"), tanto si se hallan directamente, como si se usa para ello la denominada matriz de Zaderenko, la cual facilita su cálculo de una manera más estructurada mediante la escritura de las duraciones de los trabajos en una matriz y de los tiempos mínimos y máximos de los eventos en una columna y una fila adicionales. Esta facilidad de cálculo de los tiempos mínimos y máximos garantiza la eficiencia del método. Además, dicha eficiencia se ve mejorada si los vértices de la red del proyecto son numerados de forma que si $i \longrightarrow j$ es un arco de dicha red, sea $i < j$. Por otra parte, esta numeración es siempre posible pues la red del proyecto es acíclica. Por tanto, podemos afirmar que el método es eficiente y nos permite calcular rápidamente la duración óptima de un proyecto y los tiempos mínimos y máximos de comienzo y finalización de todas y cada una de las actividades o trabajos que lo componen.

7. Problemas relacionados

Existen una serie de extensiones y problemas relacionados con los anteriormente tratados que resumimos parcialmente en los comentarios siguientes.

En el tipo de problemas introducidos previamente se han considerado tiempos de proceso de los trabajos o actividades a realizar que, o bien son conocidos, o bien son estimados. En cualquier caso, tenemos la posibilidad de trabajar con datos concretos, es decir, estamos en un contexto de certidumbre. En otras ocasiones nos podríamos encontrar con problemas en los que no se sabe nada acerca del valor que van a tomar los tiempos de proceso, es decir, estaríamos en la situación de total incertidumbre. Sin embargo, podríamos encontrarnos en un contexto de riesgo en el que no se conoce con exactitud los valores que van a tomar los tiempos de proceso de los trabajos, pero se tiene información de la experiencia previa en trabajos iguales o parecidos, los cuales nos permiten afirmar con qué probabilidad el tiempo de proceso de una actividad concreta va a tomar un valor determinado. Nos encontramos entonces con variables aleatorias y aparece el denominado método PERT en contexto aleatorio y, más en general, los problemas de Planificación Estocástica.

En los problemas que hemos tratado en este trabajo no se establece ninguna limitación de ningún recurso, en el sentido de que, si decidimos planificar dos, tres o más actividades en un mismo día, ello es siempre posible con los recursos disponibles. A veces esto no es posible. Piénsese, por ejemplo, en un puerto con una única grúa para descargar los contenedores de los barcos. Aunque quepan dos, tres o más barcos a la vez en el puerto no podrán descargarse simultáneamente pues sólo se dispone de una grúa. Aquí sería necesario emplear el denominado método

PERT con recursos limitados y, más en general, las técnicas de Planificación con Recursos Limitados.

Debemos señalar también que en el problema tratado hemos admitido que si un día necesitamos 10 operarios para ejecutar las actividades del proyecto, al día siguiente podríamos necesitar 33, al tercer día 14, al cuarto 38, etc. Sin embargo, esta variabilidad origina problemas adicionales, siendo más recomendable que el número de operarios se mantenga más constante y homogéneo durante todos los días de ejecución del proyecto sin que por ello aumente mucho su duración. En este caso, se utiliza la denominada Nivelación de Recursos del Método PERT.

Bibliografía

Baker, K. R. (1974): *Introduction to sequencing and scheduling*. John Wiley and Sons.

French, S. (1982): *Sequencing and scheduling: an introduction to the mathematics of the job shop*. Ellis Horwood Series.

Phillips, D.T., Ravindran, A., Solberg, J. (1976): *Operations Research: Principles and Practice*. John Wiley and Sons.

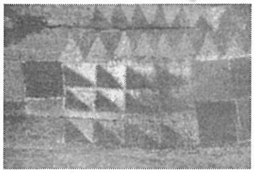
Romero López, C.(1983): *Técnicas de programación y control de proyectos*. Pirámide.

David Alcaide López de Pablo (Ciudad Real, 1966) es Licenciado en Matemáticas (Especialidad de Estadística e Investigación Operativa) y Doctor en Ciencias Matemáticas (Universidad de La Laguna) y en Ingeniería de Sistemas (Universidad de Bolonia). Actualmente es Profesor Titular de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna. Correo electrónico: dalcaide@ull.es.

Carlos González Martín (Garachico, Tenerife, 1954) es Licenciado en Matemáticas (Especialidad de Estadística e Investigación Operativa) y Doctor en Ciencias Matemáticas (Universidad de La Laguna). Actualmente es Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna. Correo electrónico: cgonmar@ull.es.

Antonio Sedeño Noda (Santa Cruz de Tenerife, 1969) es Licenciado en Ciencias Físicas (Especialidad de Electrónica) por la Universidad de Santiago de Compostela y Doctor por la Universidad de La Laguna. Actualmente es Profesor Asociado de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna. Correo electrónico: asedeno@ull.es.

XI Jaem
CANARIAS, 2003



Cueva Pintada - Gáldar

Visita nuestra página web
www.sinewton.org/xi_jaem

COMITÉ DE PROGRAMAS

Presidente: Xavier Vilella Miró
Luis Balbuena Castellano
Juan Antonio García Cruz
Concepción García Reverón
Margarita Marín Rodríguez
Emilio Palacián Gil
Manuel Pazos Crespo

Su trabajo está orientado a conseguir y superar, si es posible, el alto nivel científico y pedagógico de las Jaem.

CONFERENCIAS PLENARIAS

Claudi Alsina.
El Teorema del amor. Demostración completa.
Carmen Azcárate.
Profesores de Matemáticas: de matemáticos a profesores.
Manuel Fernández Reyes.
Algunas reflexiones sobre lo que nos queda por hacer.
Martín Kindt.
Una excursión en el paisaje geométrico del pintor Alberto Durero.

ALGUNOS NÚCLEOS TEMÁTICOS

2.- A VUELTAS CON LOS NÚMEROS

David Barba. Los números antes y ahora y el tratamiento de la diversidad ...de los docentes.
María Luz Callejo. Números que dan que pensar
Manuel Fernández Caballero. Los otros números.
Antonio R. Martín Adrián. Los algoritmos tradicionales de las cuatro operaciones aritméticas: ¡Han muerto, pero no han sido enterradas.
José A. Mora y Salvador Caballero. Calculadora para alumnos con dificultades en Matemáticas.
Martín M. Socas. Transición del pensamiento numérico al algebraico. Problemas de aprendizaje.

6.- CONEXIONES.

Silvia Margeli y Angel Alsina. Manipulación e imagen virtual en la clase de Matemáticas.
José L. Montesinos. Las Matemáticas y el Absolutismo Político: Hobbes.
Ángela Núñez. Aprendizaje de las Matemáticas con "Descartes": un recurso interactivo en INTERNET.
Nuria Planas. Identidad y conflicto en el aula de Matemáticas multicultural.
Covadonga Rodríguez-Moldes. Matemáticas más allá del currículo.
Adela Salvador. ¿Dónde hay fractales?