Solución de ecuaciones cuadráticas a partir de los elementos de Euclides

Diana Sánchez Sánchez
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
diana_milena_s@hotmail.com

Carlos Montes Fajardo
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
dma63_cmontes@uni.pedagogica.edu.co

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

Se presenta una manera de solucionar ecuaciones cuadráticas a partir de de las proposiciones 5 y 6 del libro II de los Elementos de Euclides. Se estudian estas proposiciones, su demostración y aplicación en la solución de las ecuaciones cuadráticas resaltando su valor didáctico. Se presenta además la solución de algunas de las ecuaciones cuadráticas que distinguía Al-Kharizmi, quien utilizaba, al igual que Euclides, la aplicación de áreas en su resolución.

1. Introducción

La historia de la matemática ha sido estudiada por la didáctica de la matemática bajo distintos puntos de vista: desde informaciones históricas que sirven para motivar un nuevo tema, hasta la construcción de secuencias didácticas inspiradas en la progresión histórica seguida en el desarrollo de algunas teorías. En cualquier caso, la historia nos ofrece diferentes situaciones las cuales pueden ser la base de actividades didácticas en el aula e incluso puede ser utilizada por el profesor como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje del estudiante.

Este trabajo centra su interés en la resolución de ecuaciones cuadráticas dentro de su marco histórico, partiendo del *contexto geométrico* que sirvió como base en la antigüedad, con el fin de que puedan ser utilizados también hoy como contexto para la construcción de este concepto en aula.

Este hecho permite satisfacer diversas necesidades como:

- Representar las matemáticas como parte de la cultura humana que evoluciona con ella, preparando así el terreno para llegar a la organización de los conceptos matemáticos que tienen actualmente.
- Reconocer la importancia del lenguaje simbólico y de las técnicas, y las insuficiencias y ambigüedades de cada formalismo.
- Construir y profundizar los conceptos matemáticos que se han elegido por la diversidad con la cual cada época los presenta.

Se puede crear una secuencia de situaciones didácticas, basadas en la reflexión sobre los métodos de solución de las ecuaciones cuadráticos utilizados en cada época, viendo las posibilidades y los límites de cada uno en particular, insistiendo en los estudiantes la idea de que las matemáticas evolucionan y que no son una ciencia hecha y estática.

2. El Álgebra Geométrica

2.1. Euclides

Los griegos, aunque se cree que conocían los métodos de los babilonios(métodos puramente algebraicos) para la resolución de ecuaciones, desarrollaron métodos geométricos para resolverlas y comprobar algunas de sus propiedades propiedades.

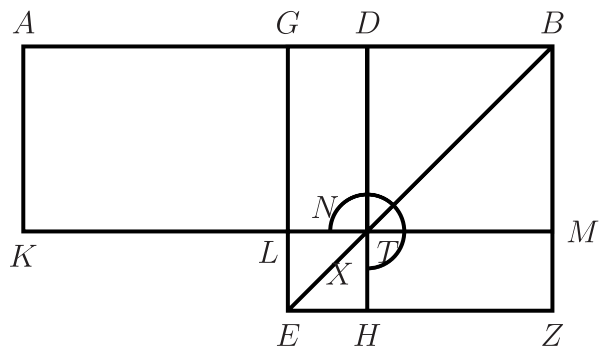
En el libro II de *Los Elementos, de Euclides*(300 a. De C.), hay 14 proposiciones que permiten resolver problemas algebraicos. Actualmente, nuestra álgebra simbólica los podría resolver rápidamente, pero el álgebra geométrica resulta importante en la escuela por su valor didáctico, debido a que sus procedimientos involucra la aplicación de áreas, situación que es más significativa para los estudiantes que una simple transposición simbólica.

A continuación se presenta un método de solución para las ecuaciones cuadráticas de la forma

$$ax - x^2 = b^2 \quad \text{y} \quad ax + x^2 = b^2.$$

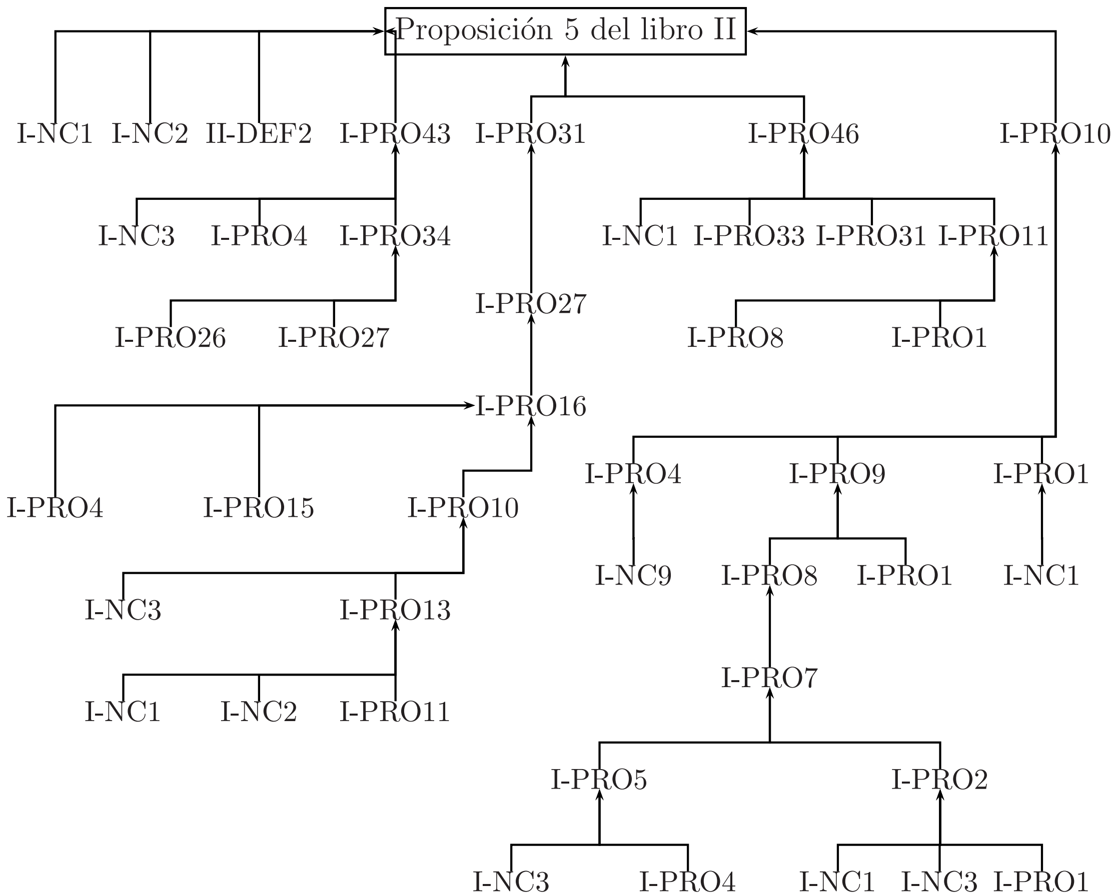
Basada en la proposición 5 de los elementos de Euclides, procedimiento conocido como "aplicación de áreas ".

Proposición 5. *Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, mas el cuadrado de la diferencia entre una de las dos partes iguales y una parte desigual, es equivalente al cuadro de la mitad de la recta dada.*



Demostración. Divídase la recta AB en partes iguales por el punto G y en partes desiguales por el punto D. Constrúyase el cuadrado $GEZB$ sobre la recta GB; trácese la BE; por el punto D la DH paralela a GE y BZ; por el T la KM paralela a las AB y EZ y por el A la AK paralela a las GL y BM. Puesto que los complemento GT y TZ son iguales, añádase el DM común y entonces el rectángulo entero GM será equivalente al DZ entero; pero el GM es igual al AL por que la recta AG es igual a la GB, y, por tanto, el AL también será igual al DZ. Añádase el rectángulo GT común, entonces el AT será equivalente al gnomon MNX; pero el AT esta comprendido por las rectas AD y DB por que la DT es igual a la DB; luego el gnomon MNX será equivalente a dicho rectángulo. Añádanse ahora el LH común, que equivale a cuadrado de GD y el gnomon MNX mas el cuadrado LH será equivalente al rectángulo comprendido por las recta AD y DB mas el cuadrado de GD; pero el gnomon MNX y el cuadrado LH forman el cuadrado $GEZB$, que es el construido sobre GB; luego el rectángulo comprendido por las rectas AD y DB mas el cuadrado de GD equivale a cuadrado de GB. □

A continuación mostraremos una secuencia lógica, que se puede convertir en secuencia didáctica, para el caso de la solución de ecuaciones cuadraticas de la forma $ax - x^2 = b^2$, cuya proposición final es la proposición 5 del libro II de Euclides. (Debe leerse de abajo hacia arriba)



más concisamente las Nociones Comunes, Definiciones y Proposiciones que se utilizan son los siguientes:

Libro I Noción Común 1
Libro I Noción Común 2
Libro I Noción Común 3
Libro I Noción Común 9
Libro I Proposición 1
Libro I Proposición 2
Libro I Proposición 4
Libro I Proposición 5
Libro I Proposición 7
Libro I Proposición 8
Libro I Proposición 9
Libro I Proposición 10
Libro I Proposición 11
Libro I Proposición 13
Libro I Proposición 15
Libro I Proposición 26
Libro I Proposición 27
Libro I Proposición 31
Libro I Proposición 33
Libro I Proposición 34

Libro I Proposición 43 Libro I Proposición 46

Libro II Definición 2

De otra forma, para resolver la ecuación de segundo grado $ax - x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB, determinamos un segmento $AB = a$ y construimos un rectángulo $ABMK$ de área $a \cdot x$. Fijando en éste un cuadrado de lado x, $DBMT$, obtenemos un nuevo rectángulo $ADTK$ de área $ax - x^2$, que es igual al área de un cuadrado de lado b.

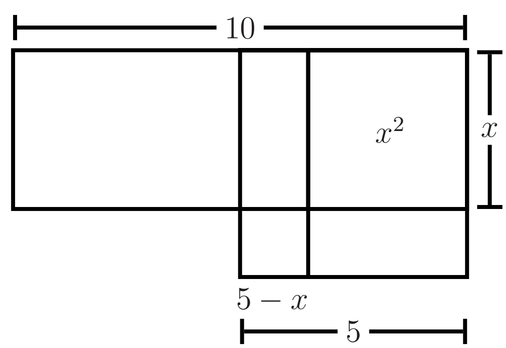
Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $\frac{a}{2}$, $GBFE$, se deduce, del uso de la *Proposición 5* que el cuadrado $GBFE$ de área $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ excede del rectángulo $ADTK$ de área $ax - x^2 = b^2$, en el cuadrado $LTHE$ de lado $\frac{a}{2} - x$; en nuestra notación se tendría,

$$\begin{aligned}
(ax - x^2) + \left(\left(\frac{a}{2}\right) - x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
b^2 + \left(\left(\frac{a}{2}\right) - x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
\left(\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 \\
\left(\frac{a}{2}\right) - x &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} \\
x &= \left(\frac{a}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}
\end{aligned}$$

que permite solucionar la ecuación dada $ax - x^2 = b^2$.

Ejemplo

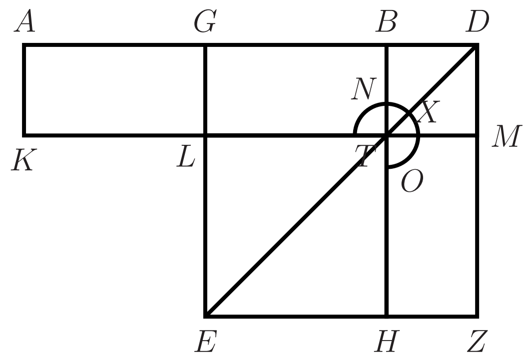
Para solucionar la ecuación $10x - x^2 = 21$, se realiza el siguiente procedimiento utilizando la proposición 5:



$$
\begin{aligned}
(10x - x^2) + (5 - x)^2 &= 5^2 \\
21 + (5 - x)^2 &= 25 \\
(5 - x)^2 &= 4 \\
5 - x &= 2 \\
3 &= x
\end{aligned}
$$

Para la solución de ecuaciones cuadraticas de la forma $ax + x^2 = b^2$, Podemos usar la proposición 6 de los Elementos de Euclides,que dice:

Proposición 6. *Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la recta entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad y la prolongación.*

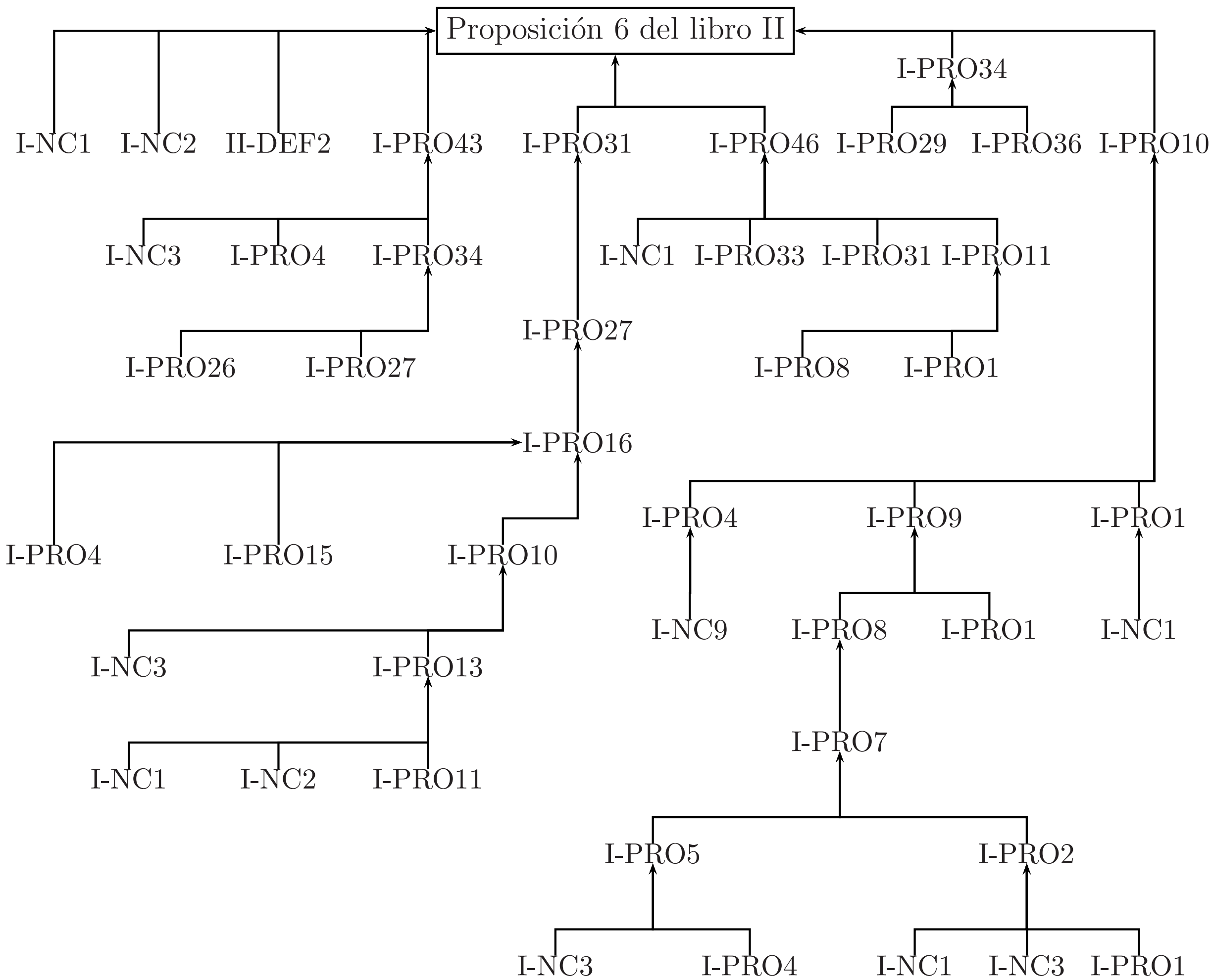


Demostración. Divídase la recta AB en dos por el punto G y prolónguese hasta D. Constrúyase sobre la recta GD el cuadrado $GEZD$; trácese la DE; por el punto B la BH paralela a las EG y DZ; por el T la KM paralela a las AB y EZ y por el A la AK paralela a las GL y DM.

Puesto que AG es igual a GB, también será igual al rectángulo AL al GT, y como este es igual al TZ, el AL será igual al TZ.

Si se añade el rectángulo común GM, el AM será equivalente a gnomon NXO; pero el AM está comprendido por las rectas AD y DB porque DM es igual DB; luego también el gnomon NXO será equivalente al rectángulo comprendido por AD y DB y si se añade el rectángulo común LH, que equivale al cuadrado de GB, el rectángulo comprendido por AD y DB mas el cuadrado de GB equivalen al gnomon NXO y el cuadrado LH; pero el gnomon y este cuadrado forman el cuadrado $GEDZ$ que es el construido sobre GD, l.q.q.d. □

A continuación mostraremos una secuencia lógica, para la solución de ecuaciones cuadraticas de la forma $ax - x^2 = b^2$, cuya proposición final es la proposición 5 del libro II de Euclides.



de una forma mas sintética las Nociones Comunes, Definiciones y Proposiciones que se utilizan son los siguientes:

Libro I Noción Común 1	Libro I Noción Común 2
Libro I Noción Común 3	Libro I Noción Común 9
Libro I Proposición 1	Libro I Proposición 2
Libro I Proposición 4	Libro I Proposición 5
Libro I Proposición 7	Libro I Proposición 8
Libro I Proposición 10	Libro I Proposición 11

Libro I Proposición 13	Libro I Proposición 15
Libro I Proposición 16	Libro I Proposición 26
Libro I Proposición 27	Libro I Proposición 29
Libro I Proposición 31	Libro I Proposición 33
Libro I Proposición 34	Libro I Proposición 36
Libro I Proposición 43	Libro I Proposición 46
Libro II Definición 2	

Es decir que, para resolver la ecuación de segundo grado $ax + x^2 = b^2$, la aplicación de la proposición anterior equivale a lo siguiente: sobre la línea recta AB, determinamos un segmento $AB = a$ y construimos, por una parte, un segmento $ABTK$ de área $a \cdot x$, y de otra , por prolongación del segmento AB el rectángulo $ADMK$ de área $ax + x^2$, que exceda al rectángulo anterior en un cuadrado de área x^2, y que es igual al área de un cuadrado de lado b, es decir, $ax + x^2 = b^2$.

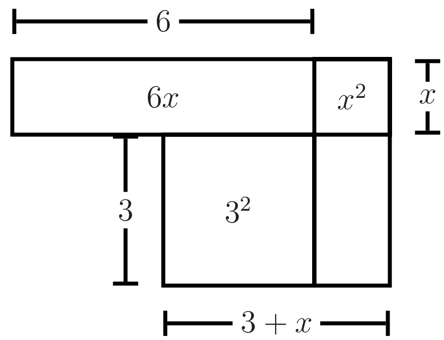
Completando ahora la figura con otro cuadrado de lado $\frac{a}{2}$, $LTHE$ y con el rectángulo de lados x y $\dfrac{a}{2}$, $TMZH$, en nuestra notación se tendría,

$$\begin{aligned} ax + x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 \\ b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 \\ \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2} \\ \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} &= \frac{a}{2} + x \\ x &= \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

que permite solucionar la ecuación $ax + x^2 = b^2$.

Ejemplo

Para solucionar la ecuación $6x + x^2 = 72$, se realiza el siguiente procedimiento:



$$\begin{aligned}(10x + x^2) + 3^2 &= (3 + x)^2\\ 72 + 9 &= (3 + x)^2\\ 81 &= (3 + x)^2\\ 9 &= 3 + x\\ 6 &= x\end{aligned}$$

2.2. Al-Khwarizmi

"Mamad ben Musa al-Khwarizmi"es considerado uno de los precursores del álgebra por la importancia de su obra y la forma como este resolvía las ecuaciones. nació y murió en Bagdad, se sabe poco de sus primeros años. Seguramente era originario de la ciudad persa de Khwarizmi (actual Jiva). Fue matemático, astrónomo y geógrafo. Su contribución a las matemáticas está estudiada con alguna extensión en El legado del Islam (pág. 498-504). Es posible que fuera él quien dio a nuestros lenguajes el término "álgebra", por el título de su libro al-Jabr wa'l-muqabala, esto es, "Ciencias de Reducción y Cancelación". Su importancia en la historia de las matemáticas no estriba en este interesante detalle, sino en el hecho de que fue el primero en presentar un tratado sistemático sobre tal materia. Tomó tanto de los conocimientos griegos como de los hindúes, e influyó en el pensamiento matemático más que ningún otro escritor medieval. Su principal aporte consistió en la aplicación de los nombres de los números hindúes a la solución numérica de las ecuaciones. Y en segundo lugar, su contribución, "a la solución de las ecuaciones lineales que constituyó el reconocimiento definitivo de la aplicación de axiomas a la transposición de términos y la reducción de fracciones implícitas a explícitas". Sus dos soluciones a la ecuación cuadrática $x^2 + px = q$ estaban basadas en métodos griegos. Por otra parte, no considero la raíz negativa, lo mismo que los posteriores escritores persas, de hecho, no fue reconocida hasta el siglo XVII. Ni tampoco se interesó por las ecuaciones cúbicas, aunque el término "cubo"tuvo que serle familiar.

El escritor musulmán iraní Muhammad Ibn Husain Bahauddín al-Amilí (1547-1621) dice que, según al-Khwarizmi, la reducción de una ecuación se lleva a cabo utilizando las operaciones de al-jabr (“completación”, el proceso de remover términos negativos de la ecuación) y al-muqabala (“balanceo”, el proceso de reducir los términos positivos de la misma potencia cuando suceden de ambos lados de la ecuación. Luego, Al-Khwarizmi, basandose en estas operaciones, muestra cómo resolver los seis tipos de ecuaciones, usando métodos de solución algebraicos y geométricos.

La cuales son:

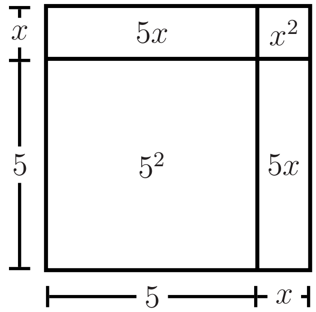
- Cuadrados iguales a raíces.
- Cuadrados iguales a números.
- Raíces iguales a números.
- Cuadrados y raíces iguales a números, es decir ; $x^2 + bx = c$
- Cuadrados y números iguales a raíces, es decir ; $x^2 + c = bx$
- Raíces y números iguales a cuadrados, es decir ; $bx + c = x^2$

A continuación se presenta el método de solución de Al - Khwarizmi para los tres últimos casos.

Cuadrados y raíces iguales a números $x^2 + bx = c$.

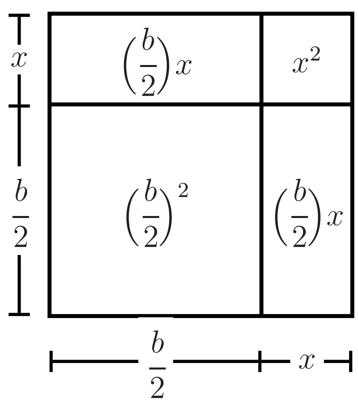
Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$, se escribe :

un cuadrado y diez raíces son iguales a 39 unidades. O sea, cuál es el cuadrado que, combinado con diez de sus raíces, dará una suma total de 39. La manera de resolver este tipo de ecuación es tomar la mitad de las raíces mencionadas. Ahora, las raíces en el problema que tenemos ante nosotros son diez. Por lo tanto, tomamos 5 que multiplicadas por sí mismas dan 25, una cantidad que agregarás a 39 dando 64. Habiendo extraído la raíz cuadrada de esto, que es 8, sustraemos de allí la mitad de las raíces, 5, resultando 3. Por lo tanto el número tres representa una raíz de este cuadrado.



Como vemos, no incluían términos negativos y las soluciones negativas tampoco eran aceptadas. Según el algoritmo anterior se podía llegar a la siguiente formula para resolver $x^2 + bx = c$:

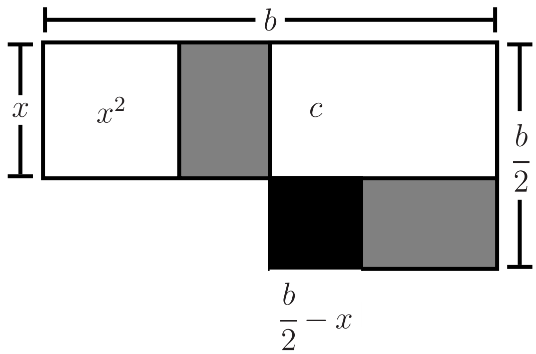
$$\begin{aligned}
x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x &= c \\
x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
x + \frac{b}{2} &= \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \\
x &= \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}
\end{aligned}$$



Cuadrados y números iguales a raíces $x^2 + c = bx$

Para resolver esta ecuación, suponía que x^2 estaba representado por un cuadrado, de modo que un lado de este cuadrado era x , a partir de este construían un rectángulo cuya área era c. La figura entera, o sea el rectángulo valdrá $x^2 + c$

y también bx , puesto que un lado del rectángulo es x , el otro lado valdría b. Tomando el punto medio de este lado, es decir, $\frac{b}{2}$ y construyendo un cuadrado que valdría $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

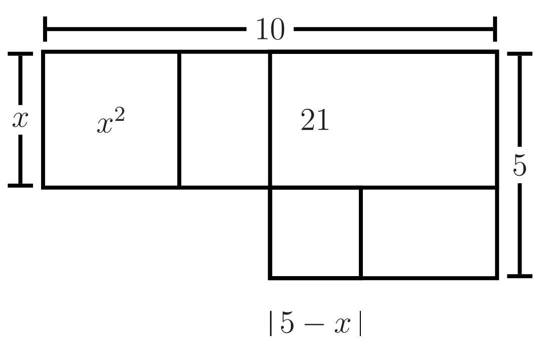


Se puede ver que hay dos rectángulos iguales en la figura, entonces el área del cuadro negro valdrá $\left(\frac{b}{2} - x\right)^2$, luego se tendra:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + c &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \\
\frac{b}{2} - x &= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \\
x &= \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^2 + 21 = 10x$ Aplicando el metodo se obtenia que:

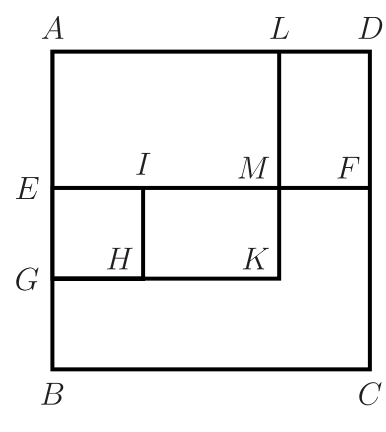


$$\begin{aligned}(5-x)^2+21&=5^2\\(5-x)^2&=25-21\\(5-x)^2&=4\\5-x&=2\\x&=3\end{aligned}$$

Raíces y números iguales a cuadrados $bx+c=x^2$

Representa x^2 por el cuadrado $ABCD$ cuyo lado AB es x, y tomando BE igual a b, de modo que $EFCB$ representa bx y, por consiguiente $ADFE$ será igual a c puesto que $bx+c=x^2$. Tomando el punto medio G de EB y construyendo el cuadrado $EGHI$ que valdría $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ y el $AGKL$, el rectángulo $LDFM$ será igual a $IHKM$ por ser $LD=GB=EG=IH$ y
$LM=IM=AG-EG$; luego el cuadrado $ALKG$ equivale a la suma del rectángulo $ADFE$ y del cuadrado $EGHI$ y valdrá por lo tanto $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ y su lado $AG=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ luego;

$$x=\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}+\frac{b}{2}$$



Ejemplo

Resolver la ecuación $x^2=3x+4$. Representa x^2 por el cuadrado $ABCD$ cuyo lado AB es x, y tomando BE igual a 3, de modo que $EFCB$ representa $3x$ y, por consiguiente $ADFE$ será igual a 4 puesto que $3x+4=x^2$. Tomando el punto medio G de EB se construye el cuadrado $EGHI$ de área $\dfrac{9}{4}$ y el cuadrado $AGKL$.

El rectángulo $LDFM$ será igual a $IHKM$ por ser $LD = GB = EG = IH$ y $LM = IM = AG - EG$; luego el cuadrado $ALKG$ equivale a la suma del rectángulo $ADFE$ y del cuadrado $EGHI$ y valdrá por lo tanto $4 + \frac{9}{4}$ y su lado $AG = \sqrt{4 + \frac{9}{4}}$ luego;

$$x = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} + \frac{3}{2}$$
$$x = 4$$

Bibliografía

[1] EUCLID, *The thirteen books of Euclid´s elements*, Volume I Introduction and Books I,II., Dover Publications, Inc, New York.

[2] LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*, Universidad Pedagógica Nacional, Ediciones Antropos, 2002.

[3] El Phys, *Historia descriptiva de las ciencias matemáticas.*, Vol II.