Significados de la Probabilidad en la Educación Secundaria

Carmen Batanero
Universidad de Granada
España
batanero@ugr.es
Probabilidad, Estadística y Combinatoria – Nivel Medio

RESUMEN

En este trabajo partimos de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos en que se consideran seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto en una cierta institución de enseñanza y el personal adquirido por un alumno dentro de la institución. Utilizamos estas ideas para analizar los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Finalizamos con algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la probabilidad.

1. Introducción

La tendencia a renovar la enseñanza de la probabilidad, haciéndola más experimental, no llevan a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad, y los componentes de su comprensión. La historia de la probabilidad está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes que muestran que la intuición estocástica, con frecuencia nos engaña (Székely, 1986). Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que las matemáticas son fruto del ingenio y la construcción humana para tratar de dar respuesta a situaciones problemáticas y están sujetas a evolución. Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos, quienes deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.

En lo que sigue analizamos resumidamente los significados históricos de la probabilidad, siguiendo a Batanero, Henry and Parzysz (en prensa). En el modelo teórico que nos sirve como base (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002) se concibe el significado de un objeto matemático, como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Diferenciamos entre *significado institucional o personal* del objeto dado, según las prácticas sean compartidas dentro de una cierta institución (por ejemplos, sean fijadas en un centro de enseñanza) o sean particulares para un sujeto de dicha institución (en el ejemplo, un alumno) y distinguimos los siguientes componentes o elementos de significado:

1. *El campo de problemas de los que emerge el objeto*. Uno de estos problemas fue propuesto a Galileo por el Duque de Toscana alrededor del año 1620: Aunque las sumas 9 y 12 se pueden componer en el mismo número de veces (3 y 6; 4 y 5; 6 y 6) al lanzar dos dados que las sumas 10 y 11 (5 y 5; 4 y 6; 5 y 6), la experiencia de los jugadores les hacen apostar a

las sumas 10 y 11, que ocurren con mayor frecuencia. Este y otros problemas semejantes dieron origen al cálculo de probabilidades.

2. *Las representaciones del concepto.* Al tratar de resolver los problemas, necesitamos objetos ostensivos, como símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y soluciones de los problemas, las operaciones y conceptos usados.
3. *Procedimientos y algoritmos* para resolver los problemas, como el cálculo combinatorio o la enumeración, la recogida de datos estadísticos, hasta llegar a los programas actuales de cálculo.
4. *Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos.*
5. *Los argumentos y demostraciones de estas propiedades.* Galileo usó la enumeración para dar una solución completa al problema propuesto por el Duque de Toscana. Esta misma demostración sería comprensible para los alumnos de secundaria, pero también podríamos organizar en clase un experimento para estimar empíricamente las posibilidades de las diferentes sumas al lanzar dos dados.

Esta enumeración sugiere la naturaleza compleja de los conceptos matemáticos, incluso los que aparentemente parecen sencillos, como es el caso de la probabilidad y la necesidad de tener en cuenta estos diferentes componentes en la enseñanza. Debemos ser también conscientes de que un mismo objeto matemático puede enseñarse con niveles diversos de dificultad y por tanto su significado puede ser diferente en distintas instituciones educativas.

2. Significados de la probabilidad

Las ideas anteriores son especialmente adecuadas para analizar el concepto de probabilidad. Hacking (1975) señala el significado dual del término probabilidad, desde su nacimiento, como grado de creencia y como evidencia aceptable para el científico, que dieron origen a las definiciones posteriores de probabilidad desde el punto de vista subjetivo y objetivo, respectivamente y, aunque complementarios, no han cesado de provocar discusiones de tipo filosófico entre los defensores de una y otra postura. El desarrollo progresivo de la probabilidad estuvo unido a un gran número de paradojas que muestran la diferencia entre los aspectos intuitivos y formales del tema (Borovcnik & Peard, 1996).

2.1. Significado intuitivo

No se sabe con seguridad cuándo comenzaron los juegos de azar, ni las razones por las cuáles el cálculo de probabilidades no se desarrolla hasta mucho más tarde que otras ramas de las matemáticas, pero el hecho es que la probabilidad estuvo ausente como idea matemática hasta los comienzos del siglo XVII a pesar del interés por los juegos y su incentivo económico, de la existencia de ideas combinatorias y de ideas filosóficas sobre el azar, o de la disponibilidad de registros estadísticos (Hacking, 1975). Las primeras ideas intuitivas surgen ligadas a las apuestas, esperanza y ganancia en un juego, así como al concepto de juego equitativo y no se precisaron hasta que se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos. Por ejemplo, Bellhouse (2000) describe un poema del siglo XIII en que se calculan las posibilidades de las diferentes sumas posibles al lanzar dos dados, usando técnicas de enumeración. Matemáticos tales como Cardano (1961/1663) recomendaron a los jugadores tener en cuenta todas las posibilidades de los diferentes resultados al hacer sus apuestas para lograr un juego equitativo.

2.2. Significado Laplaciano de la Probabilidad

La correspondencia de Pascal y Fermat (Pascal, 1963/1654) en la que resuelven algunos problemas ligados a juegos de azar se considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad. Estos autores y sus contemporáneos expresan sus resultados en términos de apuesta equitativa o división de la apuesta. Huygens (1998/1657) encuentra el valor esperado de la ganancia en un juego entre dos jugadores que tienen diferentes ventajas, resultado que es generalizado por Leibniz (1995/1676). Aunque la idea de probabilidad está ya implícita en todos estos trabajos, tenemos que esperar, no obstante a De Moivre (1967/1718, p.1) para encontrar una definición de la misma: *"Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia".*

En 1814, Laplace dio la definición que hoy enseñamos con el nombre de "regla de Laplace" para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades como *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles"*. Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición se encontró inadecuada incluso en la época de Laplace, ya que además de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos. Por otro lado, esta definición no puede aplicarse a los experimentos con un número infinito de posibilidades o a aquellos casos en que el espacio muestral es finito, pero no puede aceptarse la condición de simetría, como al lanzar al suelo una caja de chinchetas. Como hace notar Bernoulli en Ars Conjectandi, publicado en 1713 la equiprobabilidad apenas se encuentra fuera del campo de los juegos de azar.

2.3. Significado frecuencial

Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento (Bernoulli 1987/ 1713). Su demostración de la primera Ley de los Grandes Números, fue aceptada en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Este teorema indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas.

En esta visión se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse (Von Mises, 1952/1928), asumiendo la existencia teórica de dicho límite, del cual la frecuencia relativa observada es un valor aproximado. Autores como Gnedenko y Kolmogorov se entusiasmaron con esta definición, y encontraron ella el verdadero sentido de la probabilidad, concepto que sería inútil para ellos, si no pudiese relacionarse a través del teorema con las frecuencias relativas de los sucesos obtenidas a partir de experiencias realizadas en las mismas condiciones. Un problema práctico es que en el enfoque frecuencial nunca obtenemos el valor exacto de la probabilidad, sino tan sólo una estimación del mismo. Por otro lado, con frecuencia es imposible realizar los experimentos exactamente en las mismas condiciones y es difícil también saber con exactitud cuál es el número exacto de experimentos que debemos realizar para aceptar la estimación de la probabilidad como buena. Mas aún, ciertos sucesos (por ejemplo en el campo de la economía o de la historia) son irrepetibles, aunque aleatorios y según esta concepción no podríamos aplicar la teoría de la probabilidad a su estudio.

2.4. Significado subjetivo

Por tanto, aunque el significado frecuencial amplía el campo de aplicaciones de la probabilidad y da una regla de cálculo de la misma, no estuvo libre de controversias. Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, que permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez se observan sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos observados. Las probabilidades de tales causas podrían entonces revisarse (pasar de probabilidades a priori a probabilidades a posteriori) y pierden de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial. Keynes, Ramsey y de Finetti describen las probabilidades como grados de creencia personal, basadas en el conocimiento y experiencia de la persona que las asigna sobre el suceso dado. Para ellos la probabilidad de un suceso siempre está condicionada por un cierto sistema de conocimientos y puede ser, por tanto, diferente, para distintas personas.

Una dificultad inicial del enfoque subjetivo fue hallar una regla para asignar valores numéricos a las probabilidades, de forma que expresen los grados de creencia personal. Ramsey (1926) y de Finetti (1937) deducen una teoría de decisión consistente, que permite separar las creencias de las preferencias, a partir de un sistema de apuestas, e inferir los valores de las probabilidades subjetivas. En el enfoque subjetivo, ya no es necesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones, para dar sentido a la probabilidad y ello amplía el campo de aplicación, en particular al estudio de decisiones en economía, diagnóstico y otras aplicaciones. En la actualidad la escuela bayesiana aplica probabilidades a todo tipo de sucesos inciertos, aunque la controversia sobre el estatudo científico de las probabilidades subjetivas continúa.

2.5. Significado matemático

A lo largo del siglo XX, diferentes autores contribuyen al desarrollo de una teoría matemática formalizada sobre la probabilidad. Borel contempla la probabilidad como un tipo especial de medida, y Kolmogorov usa esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida para deducir una axiomática, que se acepta por todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad. Desde entonces, la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios. Este modelo ha mostrado su utilidad en las ciencias, técnicas, política y gestión; casi sin excepción en todos los campos de la actividad humana.

3. Funciones semióticas y razonamiento matemático

Además de describir los elementos de significado de un concepto Godino (2002) toma de Eco (1979) la idea de función semiótica como una relación entre una expresión que juega el papel de original en la correspondencia (significante) y un contenido (significado). Cuando una persona produce o interpreta una función semiótica, se crea un *significado elemental*, en que la persona relaciona la expresión con el contenido. Algunos ejemplos son los siguientes:

- La expresión “regla del producto” o la representación simbólica “$P(M \cap I) = P(M) \times P(I)$” hace referencia a un procedimiento que usamos para calcular una probabilidad compuesta.
- El enunciado de un problema puede representar la situación real; también podemos representar esta situación mediante una simulación; por ejemplo, podríamos usar el lanzamiento de monedas para representar el sexo de recién nacidos.
- Cuando decimos “La solución de Pascal y Fermat al problema de división de la apuesta” nos referimos a una demostración.
- En expresiones como: "Supongamos que tenemos una distribución normal $N(\mu, s)$“, las expresiones “distribución” “distribución normal”, μ, s se refieren a conceptos abstractos.

Las funciones semióticas están involucradas en la creación y transmisión de conceptos matemáticos, la demostración de propiedades y la resolución de problemas. Además de crear significados elementales, también pueden crear significados compuestos o sistémicos, como cuando decimos “los teoremas de límite”, expresión que nos evoca todo un conjunto de teoremas matemáticos con sus correspondientes demostraciones. En cada función semiótica, la correspondencia entre expresión y contenido se fija mediante reglas, que no siempre son explícitas o no son entendidas por los dos actores del discurso. Ello hace que el profesor y el estudiante en ocasiones atribuyan diferente significado a la misma expresión, y entonces hablamos de conflicto semiótico (Godino, 2002). Estos conflictos aparecen en la interacción comunicativa y con frecuencia explican las dificultades y limitaciones del aprendizaje de las matemáticas.

4. Implicaciones para la enseñanza de la probabilidad

La discusión anterior muestra el significado polifacético de la probabilidad, cuya enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, ya que están ligadas dialécticamente y en nuestra experiencia. La probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que nos ayuda a comprender la realidad. Las controversias que acompañaron la historia de la probabilidad, también han influido la enseñanza. Hasta 1970 la visión clásica, basada en cálculo combinatorio dominó el currículo de probabilidad. Puesto que el razonamiento combinatorio es complejo, muchos estudiantes encontraron difícil este enfoque, en el que, además, las aplicaciones de la probabilidad a diferentes ciencias estaba oculto. Muchos profesores vieron la probabilidad como una parte secundaria de las matemáticas, que sólo se interesaba por los juegos de azar. En otros casos era sólo una aplicación de la teoría de conjuntos (Henry, 1997).

Con el desarrollo progresivo de los ordenadores ha aumentado el interés por la introducción experimental de la probabilidad, como límite de la frecuencia estabilizada. Las simulaciones y los experimentos ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos. Pero un enfoque experimental puro de la enseñanza de la probabilidad no es suficiente. Incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar la solución de problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no puede probar que esta solución es la más adecuada, porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en el ordenador. Un conocimiento genuino de probabilidad solo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque este estudio debe ser gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes.

Por tanto, se necesita más investigación que clarifique cuáles son los componentes fundamentales del significado de la probabilidad (y en general de los cualquier concepto matemático) y los niveles de abstracción adecuados en que cada componente debe ser enseñado, para ayudar a los estudiantes a superar las posibles dificultades. Finalmente sugerimos tener en cuenta la actividad semiótica de los estudiantes al resolver problemas matemáticos de modo que les ayudemos a superar sus errores y dificultades, muchos de los cuales pueden explicarse en términos semióticos.

Agradecimiento. Este trabajo es parte de los proyectos HA2002-0069, SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y FQM-126, Junta de Andalucía.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (En prensa). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.

Bellhouse, D. R. (2000). De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations. *International Statistical Review, 68* (2), 123-136.

Bernoulli, Jacques (1987). *Ars Conjectandi- 4ème partie*. Rouen, Francia: IREM. (Trabajo original publicado en 1713).

Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook in mathematics education* (Part 1, pp. 239-288). Dordrecht: Kluwer.

Cardano, G. (1961). *The book on games of chances*. New York, N.Y., E.U.A: Holt, Rinehart y Winston. (Trabajo original publicado en 1663).

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, España: Lumen.

Finetti, de B. (1937). La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institute Henri Poincaré 7*, 1-68.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques 22*, 2-3.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Henry, M. (1997). L'enseignement des statistiques et des probabilities. En P. Legrand (Coord.), *Profession enseignant: Les maths en collège et en lycée* (pp. 254-273). Paris: Hachette-Éducation.

Huygens, C. (1998). *L'art de conjecturer*. Paris, Francia: A. Blanchard, (Trabajo original publicado en 1657).

Laplace, P. -S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (Trabajo original publicado en 1814).

Leibniz, G. W. (1995). L'estime des apparences. En M. Parmentier (Ed.*), 21 manuscrits sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie*. Paris: Vrin (Trabajo original publicado en 1676).

Mises, R. von (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid, España: Espasa Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

Moivre, A. de (1967). *The doctrine of chances* (3rd ed.). New York, N.Y., E.U.A: Chelsea Publishing (Trabajo original publicado en 1718).

Pascal, B. (1963). Correspondance avec Fermat. En *Oeuvres Complètes* (pp. 43-49). París: Seuil. (Trabajo original publicado en 1654).

Ramsey, F. P. (1926). Truth and Probability. En Ramsey. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays* (pp.156-198). New York: Harcourt, Brace and Company.

Székely, G. J. (1986). Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. (Ed.) Dordrecht, the Netherlands: Reidel.