NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 35, septiembre de 1998, páginas 17-31

Aproximación matemática a la música

Víctor Arenzana Hernández y Javier Arenzana Romeo

Resumen

El presente trabajo profundiza sobre las nociones de nota musical e intervalo musical en sentido geométrico y aritmético. El concepto aritmético de nota musical aporta a los alumnos la idea de que una misma cosa (una nota) se puede mostrar con distintas apariencias (diferentes frecuencias); el concepto de nota musical es un ejemplo de relación de equivalencia. El sentido geométrico de nota musical se expone a partir del movimiento de dos móviles con movimiento uniforme. A partir de estos problemas dinámicos se da un procedimiento geométrico para determinar cuatro puntos en cuaterna armónica. Esta construcción proporciona un método para dividir armónicamente el intervalo de una octava mediante las notas tercera y quinta y permite construir acordes perfectos y comprender la razón de la diferente separación entre los trastes de una guitarra.

Abstract

The present work deepens on the musical note notions and musical interval in geometric and arithmetic sense. The arithmetic concept of musical note provides to the pupils the idea of the fact that a same thing (a note) can be shown with different appearances (different frequencies); the musical note concept is an example of relationship of equivalence. The geometric sense of musical note is exposed from movement of mobile two with uniform movement. As of these dynamical problems is given a geometric procedure to determine four points in harmonic tetrad. This construction provides a method to divide harmoniously the interval of an octave through the third and fifth notes and permits to build perfect chords and to understand the reason of the different separation between the frets of a guitar.

Pitágoras y los inicios de los estudios sobre música

La música formaba parte de los estudios medievales del Cuadrivium (aritmética, geometría, música y astronomía), y era, por consiguiente, una de las artes liberales de carácter cuantitativo que vertebraban la formación universitaria medieval. El origen del estudio de la música considerada como ciencia cuantitativa se atribuye a Pitágoras, el cual realizó una serie de descubrimientos aritmético-musicales que constituyen el inicio de la ciencia musical y, quizás, el primer ejemplo histórico de experimentación científica.

La leyenda dice que, al pasar Pitágoras por una herrería, le atrajo la sonoridad que emitían los martillazos que daban cuatro esclavos al golpear sobre el yunque para trabajar un trozo de metal. Tres de ellos emitían sonidos consonantes, mientras que el cuarto producía disonancia. Creyendo el sabio que el sonido dependía de la fuerza con que golpeaba cada uno de los herreros hizo que se intercambiaran los martillos, pero el resultado fue que el mismo martillo seguía produciendo el sonido disonante, lo que le hizo concluir que la sonoridad no dependía de la fuerza de los esclavos sino de las características de cada martillo. Al llegar a su casa hizo la primera experiencia de laboratorio que registra la historia, pesó los martillos, ató pesos a cuerdas de igual longitud hasta que emitieran las mismas notas que daban los martillos, entonces descubrió que los tres consonantes tenían pesos proporcionales a 6, 8 y 12 y estableció la proporción:

$$\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}$$

Agregó después un trozo de arcilla al cuarto martillo que producía desarmonía hasta obtener música agradable, una vez añadida la arcilla, dedujo la relación siguiente

$$\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$$

que, según Jámblico, se llama musical porque contiene las relaciones musicales de los sonidos armónicos.

Es dudoso que Pitágoras pudiera llegar a esas conclusiones mediante el experimento descrito, puesto que las conclusiones no responden a la realidad física, no obstante, construyó un instrumento musical llamado **monocordio**, que constaba de una cuerda sonora y una regla graduada o *canon* con la que se podían determinar las relaciones numéricas de los diferentes segmentos de cuerda sonora y su sonoridad.

Pitágoras dejó sentadas relaciones tales como las siguientes. Si se dispone de una cuerda de longitud **L** a la que mantenemos con una tensión constante y al hacerla vibrar emite una nota **C**, cuando hacemos sonar su mitad emite la **C(2/1)**, que es la octava. Dividiendo la cuerda en tres partes y haciendo sonar dos se emite la quinta (3/2) de **C**. Dividiendo en cuatro partes y haciendo sonar tres de ellas se obtiene la cuarta (4/3) de **C**. Estas notas al hacerlas sonar conjuntamente resultan agradables (consonantes) al oído.

Explicación física del experimento pitagórico

Se ha dicho muchas veces que ni Pitágoras ni su escuela pudieron realizar los experimentos descritos ya que, si realmente los hubieran llevado a cabo, se habrían dado cuenta de que las notas emitidas no guardan relación con los pesos que se cuelguen de las cuerdas, sino con la raíz cuadrada de los mismos. En la teoría musical se establecen habitualmente relaciones entre las frecuencias para fijar las notas, la noción de frecuencia no era conocida por los griegos. Pitágoras dio relaciones entre longitudes de cuerdas sometidas a tensiones iguales y la nota emitida al vibrar. El estudio físico del sonido relaciona ambas cuestiones.

A continuación se exponen las leyes físicas a las que responden las cuerdas vibrantes.

Los instrumentos de cuerda emiten sonido gracias a las vibraciones transversales de una o varias cuerdas, de aquí la importancia del estudio de tales vibraciones.

El avance de una perturbación transversal sobre una goma atada a una pared que se mantiene tensada tirando del otro extremo consiste en una ondulación que se propaga por la goma, alcanza la pared, se refleja en el extremo atado y prosigue la marcha en sentido contrario. La velocidad de propagación, **c**, de la perturbación viene dada, en función de la tensión de la cuerda **F** y de la densidad lineal **m**, por:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Si suponemos que la onda se propaga a lo largo de una cuerda vibrante con extremos fijos con un movimiento ondulatorio sinusoidal de longitud de onda **l**, la onda se propagará hasta la pared, su movimiento se reflejará y nacerán ondas estacionarias en las cuales la distancia entre cada dos nodos consecutivos vale **l/2**. Como los extremos han de ser necesariamente nodos, las formas propias de vibración de una cuerda se obtendrán dividiéndola en un número cualquiera de partes iguales y poniendo los nodos en los puntos de división.

Cuando no hay nodos intermedios, la cuerda vibra en semionda, si su longitud es **L**, se tiene, llamando **T** al período y **N** a la frecuencia:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{cT}{2} = \frac{1}{2N}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

de modo que se define la frecuencia fundamental como:

$$N_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

En general, para calcular la frecuencia del sonido que resulta al dividir la cuerda en p partes iguales se procederá, en las mismas hipótesis que antes:

$$\frac{L}{p} = \frac{\lambda}{2}$$

y el mismo razonamiento nos lleva a que la frecuencia N_p es

$$N_p = p\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

En general, si hacemos vibrar una parte m/n de la cuerda obtendremos un sonido de una frecuencia:

$$N_{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

En esta fórmula se encuentran las leyes de las cuerdas vibrantes que ya fueron enunciadas por Galileo en el siglo XVII y que son:

a) Los sonidos parciales forman la serie completa de armónicos del sonido fundamental.
b) La frecuencia fundamental es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión.
c) La frecuencia fundamental es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad lineal de la cuerda.
d) La frecuencia fundamental es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda que vibra.

Las matemáticas y las nociones de notas e intervalos musicales.

Introducción

La música aparece en el momento que consideramos una serie de sonidos por el efecto que producen en el oído y no por sus características físicas.

La música se escribe con una combinación de las notas básicas bien conocidas:

Do Re Mi Fa Sol La Si

Además de estas hay otras intermedias que se llaman sostenidos (#) y bemoles (b) , de modo que la escala musical completa es

Do Do# Re Re# Mi Fa Fa# Sol Sol# La La# Si

o, equivalentemente:

Do Reb Re Mib Mi Fa Solb Sol Lab La Sib Si

Cada una de estas notas, desde el punto de vista físico no es otra cosa, en primera aproximación, que un sonido en una determinada frecuencia. Como las frecuencias que puede percibir el oído humano están comprendidas entre 16 y 20000 Hz., la frecuencia de las notas musicales variará entre esos límites.

La primera pregunta que nos planteamos es la siguiente: ¿Con esas doce notas se pueden escribir todas las melodías, sinfonías y conciertos que conocemos?. La respuesta es sí. No obstante, observamos que un piano tiene 108 teclas y que al pulsar cada tecla el oído distingue un sonido diferente. Es decir, que las sonatas para piano contienen, a lo sumo, 108 sonidos diferentes. Sin embargo, el piano tiene solamente 12 notas distintas.

Las consideraciones anteriores nos llevan a la conclusión de que en el teclado de un piano hay 9 escalas musicales (9 x 12), ordenadas de izquierda a derecha de más graves a más agudas. Además concluimos que tiene, por ejemplo, nueve notas **Do** que suenan de manera diferente. ¿Qué tienen en común las nueve notas **Do** entre sí, las nueve **Re** entre sí, etc?.

Para comprender el concepto de nota musical comenzaremos por fijarnos en las escalas cuarta y quinta del piano y pulsemos la tecla **La** de la quinta sin producir sonido, liberando el apagador de la tecla. Pulsando a continuación la tecla **La** de la cuarta escala, se puede observar que la nota **La** de la quinta empieza a sonar por un fenómeno de resonancia. Se pueden medir las frecuencias de esta notas que son las siguientes, la frecuencia de **La** en la quinta escala es 440 Hz y la frecuencia de **La** en la cuarta escala de 220 Hz.

El fenómeno de resonancia puede apreciarse igualmente en una guitarra bien afinada. Pulsando la cuarta cuerda pisada en el segundo traste (**Mi**) se observa que vibran y emiten sonido **Mi** en otra escala las cuerdas primera y sexta por simple resonancia. Si un sonido tiene frecuencia **r** (**r** número real) y otro **2r** constituyen la misma nota en octavas diferentes (la segunda frecuencia es la más aguda). A los intervalos de frecuencia [r/4,r/2), [r/2,r), [r, 2r), [2r, 4r), [4r, 8r), etc se les llama octavas.

La escala musical consta de doce semitonos iguales. Esto quiere decir que una octava se ha dividido en doce partes. ¿Por qué se han elegido doce y no otro número?. La razón de las diferentes divisiones de la octava hay que buscarlas en cuestiones de apreciación de consonancias, esto es, en la determinación de diferentes sonidos que, emitidos sucesiva o conjuntamente, su combinación nos resulta agradable (consonante) al oído. Por esta razón, cuando se trata de introducir sonidos en una octava, entre [r, 2r) por ejemplo, hay que procurar que en esa octava haya el máximo de sonidos consonantes con la frecuencia **r**.

Definiciones

En el teclado del piano hemos visto que si un sonido tiene cualquiera de las frecuencias ..., r/4, r/2, r, 2r, 4r,... (**r** número real) representa la misma nota musical. Esto es, que cualquier sonido de frecuencia $r2^n$, siendo **n** un número entero, representa la misma nota, aunque en octavas diferentes. Por consiguiente, podemos afirmar que cada nota musical tiene asociado un número infinito de frecuencias, aunque solamente un número finito de ellas sean audibles para el oído humano.

En el conjunto de todas las frecuencias, que no es otro que el conjunto R^+, se puede definir una relación de equivalencia diciendo que *dos frecuencias son equivalentes cuando dan lugar a la misma nota.*

Definición 1 .-Dadas dos frecuencias **r** y **s** Î R^+ se define la siguiente relación:

r ° **s** Û **r** = **s** 2^k para algún **k** Î Z.

La relación cumple las propiedades reflexiva simétrica y transitiva y es, por consiguiente, de equivalencia. El conjunto cociente R^+/° es el conjunto de todas las notas.

Toda nota musical admite una frecuencia representativa en el intervalo [1,2), ya que una frecuencia cualquiera, **r**, está comprendida entre $1x2^k$ y $2x2^k$, para un entero k conveniente y el valor **r** se podrá alcanzar multiplicando 2^k por un valor entre 1 y 2.

La nota asociada a una frecuencia **r** se representará por [r], donde [r] = { ..., r/4, r/2, r, 2r, 4r,... }. Dado la importancia que tiene el representante de la clase de equivalencia en el intervalo [1,2) usaremos la siguiente notación: sea **a** la frecuencia de [r] contenida en [1,2), entonces escribiremos:

$$[r] = \{ \ldots, r/4, r/2, r, 2r, 4r, \ldots \} = \{r\} = \mathbf{a}$$

Una vez establecido claramente el concepto de nota musical introduciremos el concepto de **intervalo musical**, noción imprescindible para comprender adecuadamente los sistemas de afinación que se han dado a lo largo de la historia de la música.

Se debe observar que para escribir música con las notas [r] y [s] podremos utilizar sonidos de frecuencia:

$$\ldots r/4, r/2, r, 2r, 4r, \ldots \quad y \quad \ldots s/4, s/2, s, 2s, 4s, \ldots$$

Es decir, se escribirá música con el sonido de frecuencia **r** y sus octavas y con el sonido de frecuencia **s** y las suyas, evidentemente dependiendo de la relación que exista entre las frecuencias **r** y **s**, se conseguirán unos u otros efectos sonoros.

Definición 2.- Dadas dos frecuencias **r** y s$\hat{\text{I}}$$R^+$ se llama **intervalo de frecuencias** entre **r** y **s** a la razón **s/r**, que representaremos $I_F(r, s) = \mathbf{s/r}$.

Observaciones:

a) El orden de las notas es importante, ya que $I_F(r, s)$ es **s/r** y $I_F(s, r) = \mathbf{r/s}$.

b) Si $I_F(r,s) = \mathbf{1}$ el intervalo se llama unísono. Si $I_F(r,s) > \mathbf{1}$ el intervalo se llama ascendente y si $I_F(r,s) < \mathbf{1}$ el intervalo se denomina descendente,

Definición 3.- Dadas dos notas [r] y [s] se llama **intervalo musical** entre [r] y [s] al número real representante de [s/r], en el intervalo [1,2), a este intervalo lo denominaremos $I_M([r],[s]) = \{s/r\}$.

Observaciones:

a) El orden es importante, no es lo mismo $I_M([r],[s])$, que el $I_M([s],[r])$.

Ejemplo: Sea [r] = [300] y [s] = [100], en este caso:

I_M ([r],[s]) = I_M ([300],[100]) = Representante en [1,2) de I_F (300,100) = Representante en [1,2) de 1/3 = 4/3.

I_M ([s],[r]) = I_M ([100],[300]) = Representante en [0,1) de I_F (100,300) = Representante en [1,2) de 3 = 3/2.

Este ejemplo nos sugiere la siguiente definición de intervalo musical inverso:

Definición 4.-Dado un elemento a de [1,2), al que le corresponde un intervalo musical entre dos notas [r] y [ar], esto es, I_M([r],[ar]), se llama **intervalo musical inverso** de I_M([r],[ar]) al intervalo I_M([ar],[r]).

Evidentemente $I_M([r],[ar]) = I_M^{-1}([ar],[r])$

La escala pitagórica

El sistema de afinación pitagórico

El sistema básico de afinación pitagórico consiste en partir de una nota básica, que llamaremos **Do**, entonces se definen seis notas **Re**, **Mi**, **Fa**, **Sol**, **La**, **Si** dentro de la octava, de manera que en la sucesión:

Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si

la distancia entre una nota y la siguiente sean quintas. Es decir, se obtiene cada una de la anterior haciendo vibrar 2/3 de la cuerda que da la nota fundamental. Los intervalos son :

I_M(Fa, Do) = I_M(Do, Sol) = I_M(Sol, Re) = I_M(Re, La) =
= I_M(La, Mi) = I_M(Mi, Si) = 3/2.

La sucesión de quintas puede prolongarse a derecha e izquierda mediante notas alteradas. Por la izquierda:

Fab, Dob, Solb, Reb, Lab, Mib, Sib, Fa

Por la derecha:

Si, Fa#, Do#, Sol#, Re#, La#, Mi#, Si#

de manera que la sucesión de notas de la escala pitagórica de quintas es:

Fab, Dob, Solb, Reb, Lab, Mib, Sib, Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si, Fa#, Do#, Sol#, Re#, La#, Mi#, Si#

Se puede observar que el intervalo entre las notas no depende de la nota elegida como base, sino del número de notas que se quieran introducir.

Cálculo de los intervalos relativos a do en la escala

La escala pitagórica de quintas **Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si** verifica que $I_M(N_i, N_{i+1})$ entre dos notas consecutivas N_i y N_{i+1} es 3/2. A partir de esta relación se puede determinar el intervalo que hay entre Do y cualquiera de las notas:

I_M(Do, Sol) = 3/2

I_M(Do, Re) = I_M(Do, Sol) x I_M(Sol, Re) = [3/2] x [3/2] = [9/4] = {9/8} = 9/8.

I_M(Do, La) = I_M(Do, Re) x I_M(Re, La) = [9/4] x [3/2] = [27/8] = {27/16} = 27/16.

I_M(Do, Mi) = I_M(Do, La) x I_M(La, Mi) = [27/16] x [3/2] = {81/64} = 81/64.

I_M(Do, Si) = I_M(Do, Mi) x I_M(Mi, Si) = [81/64] x [3/2] = [243/128] = {243/128} = 243/128

I_M(Do, Fa) = I_M^{-1}(Fa, Do) = $[3/2]^{-1}$ = [2/3] = [4/3] = {4/3} = 4/3

Cálculo de los intervalos musicales entre notas consecutivas no alteradas en la escala

La escala Pitagórica de quintas **Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si** verifica que $I_M(N_i, N_{i+1}) = 3/2$, esto es, el intervalo musical entre dos notas consecutivas $\mathbf{N_i}$ y $\mathbf{N_{i+1}}$ es 3/2. A partir de esta relación se puede determinar el intervalo entre dos notas consecutivas de la escala natural **Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si**.

I_M(Do, Re) = I_M(Do, Sol) x I_M(Sol, Re) = [3/2] x [3/2] = [9/4] = {9/8} = 9/8.

$I_M(Re, Mi) = I_M(Re, Do) \times I_M(Do, Mi) = [8/9] \times [81/64] = [9/8] = \{9/8\} = 9/8$

Análogamente, se puede calcular:

$I_M(Mi, Fa) = I_M(Mi, Do) \times I_M(Do, Fa) = 256/243$

$I_M(Fa, Sol) = I_M(Fa, Do) \times I_M(Do, Sol) = 9/8$

$I_M(Sol, La) = I_M(Sol, Do) \times I_M(Do, La) = 9/8$

$I_M(La, Si) = I_M(La, Do) \times I_M(Do, Si) = = 9/8$

$I_M(Si, Do) = I_M^{-1}(Do, Si) = 256/243$

En consecuencia, los intervalos entre notas no alteradas consecutivas de la escala natural son:

$I_M(Do, Re) = I_M(Re, Mi) = I_M(Fa, Sol) = I_M(La, Si) = 9/8$

$I_M(Mi, Fa) = I_M(Si, Do) = 256/243$

Estos cálculos motivan las siguientes definiciones:

Definición 5. Llamaremos *Tono* a la razón 9/8 y *Semitono Diatónico* (**Sd**) a la razón 256/243.

De la escala pitagórica de quintas **Fab, Dob, Solb, Reb, Lab, Mib, Sib, Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si, Fa#, Do#, Sol#, Re#, La#, Mi#, Si#** se pueden deducir el intervalo musical entre una nota **N** y **N#** y entre **Nb** y **N**. El cálculo de los intervalos los ponemos como proposiciones:

Proposición 1. $I_M(Nb, N) = 2187/2048$
Demostración: $I_M(Nb, N) = [(3/2)^7] = [3^7/2^7] = 2187/2048$

Proposición 2. $I_M(N, N\#) = 2187/2048$
Demostración: Análoga a la anterior.

Definición 6.- Los intervalos comprendidos entre una nota **N** y **N#** y entre **Nb** y **N** son iguales a 2187/2048 y a esa razón se le llama *Semitono Cromático* (**Sc**).

Proposición 3: Sc Sd = 9/8

Demostración: Sc Sd = (2187/2048) (256/243) = 9/8

Observaciones:

a) Entre **Sd** y **Sc** completan un tono, además **Sd** < **Sc**, ya que (256/243) < (2187/2048).

b) La distribución de notas en la escala pitagórica es irregular, en el sentido de que los intervalos entre notas son muy diferentes unos de otros y, además, existen notas entre las que media un intervalo muy pequeño.

$$I_M(\text{Do, Reb}) = I_M^{-1}(\text{Reb, Do}) = (2^8/3^5) = \mathbf{Sd}$$

$$I_M(\text{Do\#, Re}) = I_M^{-1}(\text{Re, Do\#}) = (2^8/3^5) = \mathbf{Sd}$$

Teniendo en cuenta que entre una nota y su correspondiente alterada hay una diferencia de **Sc** y que **Sd** < **Sc,** se deduce que Do está más cerca de Reb que de Do#. Por lo tanto, entre Do y Re las notas quedan ordenadas del siguiente modo

Do, Reb, Do#, Re

A continuación haremos una serie de cálculos que ponen de manifiesto uno de los inconvenientes de la afinación pitagórica: la distinción entre notas de frecuencias muy próximas

$9/8 = I_M(\text{Do, Re}) = I_M(\text{Do, Reb}) \times I_M(\text{Reb, Do\#}) \times I_M(\text{Do\#, Re})$ de donde $9/8 = I_M(\text{Reb, Do\#})\ 2^{16}/3^{10}$

Por lo tanto $I_M(\text{Reb, Do\#}) = 3^{12}/2^{19} = 1'0116$. A este intervalo generalmente se le llama **Coma**. El intervalo entre Do y Si# es de una Coma

$I_M(\text{Do, Si\#}) = [(3/2)^{12}] = [(3^{12}/2^{19}]$. Por lo tanto se puede asegurar que entre Do y Reb se encuentra Si#. Y el orden de esas notas quedará Do, Si#, Reb, Do#, Re.

El orden final de la escala, tras calcular los intervalos correspondientes entre las notas, queda así:

Do, Si#, Reb, Do#, Re, Mib, Re#, Fab, Mi, Fa, Mi#, Solb, Fa#, Sol, Lab, Sol#, La, Sib, La#, Dob, Si, Do.

Los tipos de intervalos que aparecen son el Semitono diatónico, entre Do# y Re, la Coma, entre Reb, Do# y otro intervalo más pequeño como el que se da entre Si# y Reb que vale $I_M(\text{Si\#, Reb}) = [(2^{27}/3^{17}]$.

La lista de notas pitagóricas se puede seguir ampliando y se puede dar una lista de dobles sostenidos y dobles bemoles, que no coincidirán con las notas anteriores. Además, con el sistema pitagórico de formar notas por quintas, $I_M(N_i, N_{i+1}) = 3/2$, nunca se llega al unísono, esto es, a alcanzar la octava de la nota de partida correspondiente. Esto es debido a que con potencias de 3/2, que es la condición que se impone al construir la escala por quintas, nunca se pueden conseguir potencias enteras de 2, que es la relación que existe entre las frecuencias de una nota y su octava, equivalentemente, no existen enteros m y n tales que $3^n = 2^m$.

La conclusión que se puede sacar es que en la escala pitagórica son necesarias infinitas notas para escribir y transportar (subir o bajar una o más octavas) cualquier melodía.

Sistema de afinación temperada

El sistema de afinación temperada está más próximo a la física del sonido. Se basa en la cercanía de sonido de algunas notas y el hecho de que no se utilicen habitualmente las 21 notas básicas de una afinación. Según este sistema se asocian las notas por proximidad sonora de la siguiente forma:

(Do, Si#), (Reb, Do#), Re, (Mib, Re#), (Fab, Mi), (Fa, Mi#), (Solb, Fa#), Sol, (Lab, Sol#), La, (Sib, La#), (Dob, Si), Do.

las nueve identificaciones entre notas que se diferencian en una Coma o menos nos lleva a un sistema de doce notas. El sistema de afinación temperado consiste simplemente en distribuir estas doce notas en la escala de manera que entre una nota y la siguiente quede el mismo intervalo. Es decir, la octava queda dividida en doce intervalos iguales

Do, Do#, Re, Re#, Mi, Fa, Fa#, Sol, Sol#, La, La#, Si, Do.

El intervalo entre dos notas cuales quiera consecutivas lo denominaremos *Semitono Temperado*, St. Se verifica que $St^{12} = 2$, por lo tanto:

$$St = \sqrt[12]{2} = 1'05946309$$

Este sistema de afinación tiene muchas ventajas. Entre ellas está el hecho de que se puede cambiar de tono sin problema alguno y aunque la afinación no es perfecta las diferencias son prácticamente inapreciables por el oído, ya que la quinta (3/2), se calcula así:

$$2^{7/12} = 1'4983.. < 3/2.$$

La afinación temperada no proporciona quintas justas ni los sonidos consonantes con una nota dada son perfectos. Pero es suficiente para la percepción del oído humano que no puede distinguir más que diferencias de un Hz a lo sumo.

La afinación temperada, tomando como base el La natural de 440 Hz., da las siguientes frecuencias para una escala:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
262	294	330	349	392	440	494	523

Calculando las frecuencias por quintas según la escala pitagórica se obtendría, calculándolas a partir de Fa de 349 Hz:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
262	295	332	349	393	442	497	524

Donde puede apreciarse la proximidad de las frecuencias y el pequeño error cometido en cada sonido en una y otra escalas. Las ventajas del sistema temperado son indudables. Con él se puede escribir música con notas separadas a intervalos iguales con lo que el transporte musical es trivial.

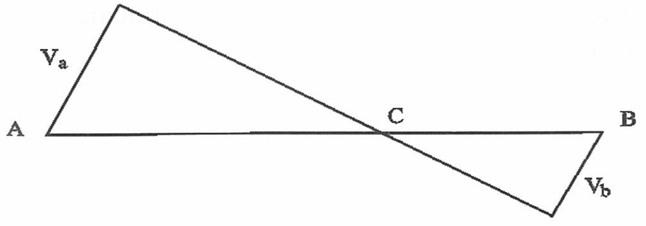
Los problemas de móviles, la cuaterna armónica y la música

A continuación observaremos el problema de forma geométrica a partir de la cuaterna armónica. En esta particular aplicación usaremos la noción de cuaterna armónica de una forma distinta de la habitual, no tendremos en cuenta la orientación de los segmentos y partiremos de los problemas conocidos como problemas de móviles. Para centrarlo planteemos la siguiente cuestión:

Sean dos móviles que parten de los puntos A y B, separados por una distancia d, que se acercan con velocidades respectivas v_a y v_b . Evidentemente se encontrarán en un punto C situado entre A y B que verificará:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{v_a}{v_b}$$

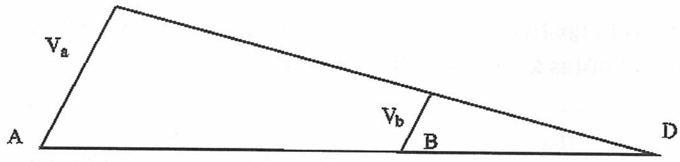
Gráficamente:



Análogamente, si dos móviles parten de los puntos A y B, separados por una distancia d y se persiguen con velocidades respectivas v_a y v_b en sentido de A a B, si $v_a > v_b$, se encontrarán en un punto D, situado a la derecha de B, este punto verificará:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{v_a}{v_b}$$

Gráficamente:

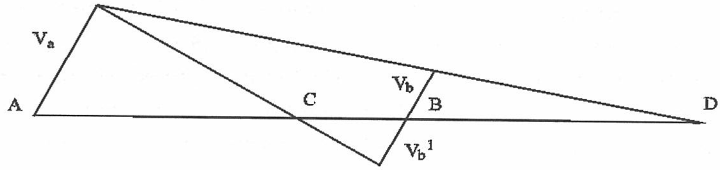


De las igualdades anteriores se deduce que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

salvo el signo de la orientación de los segmentos.

En este caso se dice que C y D dividen armónicamente a los puntos A y B. A partir de las gráficas anteriores:



Dados dos puntos A y B, existen infinitas parejas de puntos que dividen armónicamente a AB, pero, fijado un tercer punto el cuarto queda unívocamente determinado. Si fijamos los puntos A,B,D de manera que AD = d y AB = d/3 (es decir, que al sonar libre la porción de cuerda BD emita la quinta de la cuerda AD al aire), el punto C, que está en cuaterna armónica con ellos tal que AC = x verificará:

$$\frac{x}{\frac{d}{3} - x} = \frac{d}{\frac{2d}{3}}$$

de donde x = d/5. La nota que se produce al hacer vibrar los 4/5 de la cuerda (distancia CD) se llama tercera de la nota fundamental. Esta nota, junto con la natural y la quinta forman un acorde perfecto, tónica, tercera y quinta, así son los acordes Do-Mi-Sol, Sol-Si-Re, etc. Es evidente que este sistema gráfico permite construir acordes o determinar la posición de los trastes en una guitarra.

Sugerencias y actividades para la clase

Las consideraciones expuestas en los apartados anteriores sugieren una serie de actividades en torno a la teoría musical para realizar con alumnos de cuarto de la ESO o primer curso de Bachillerato, entre otras:

1º Que los alumnos, sobre una cuerda tensa de guitarra, toquen tres notas consecutivamente, que les resulten agradables al oído haciendo vibrar parte de la cuerda y anoten la fracción de cuerda que vibra. (salvo excepciones, serán una nota, la tercera y la quinta).

2º Utilizar la construcción del apartado anterior para obtener la tercera y la quinta de una nota.

3º Que los alumnos anoten la fracción de cuerda que vibra y la frecuencia detectada por un frecuencímetro para justificar empíricamente las leyes de Galileo.

Bibliografía

Goldaraz Gainza, J. J. (1992): *Afinación y temperamento en la música occidental*, Alianza Música, Madrid.

Rey Pastor, J. ; Puig Adam, P. (1933): *Elementos y complementos de Geometría,* Colección Elemental Intuitiva, Imprenta A. Marzo, Madrid.

Sayas González, F. J. (1995): "Una aproximación matemática a la afinación musical". *Nasaarre, Revista Aragonesa de Musicología* XI,1-2, pp.471, 489. Institución Fernando el Católico. Zaragoza..

Vera, F. (ed.) (1972): *Científicos griegos*, Tomo I, Aguilar, Madrid.

Víctor Arenzana Hernández (Calahorra, La Rioja, 1948) es Doctor en Matemáticas. Actualmente es Profesor Asociado en la Universidad de Zaragoza y Catedrático del Instituto «Félix de Azara» de Zaragoza. Fue presidente (1981-1985) de la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Sánchez Ciruelo. Tiene numerosas publicaciones entre libros, actas de congresos y revistas.

Javier Arenzana Romeo (Zaragoza, 1976) es estudiante de Ciencias Matemáticas en la Universidad de Zaragoza, haciendo la especialidad de Análisis Numérico. Ha iniciado estudios musicales.