LOS PROCESOS DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL LÍMITE: UN ANÁLISIS SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Verónica Molfino, Gabriela Buendía
Instituto de Profesores "Artigas" Uruguay
Cicata – IPN México
veromolfino@gmail.com; gbuendia@ipn.mx
Campo de investigación: Socioepistemología Nivel: Medio y superior

Resumen. *Se reportan los avances de una investigación sobre los procesos de institucionalización del concepto de límite cuyo objetivo es explicar cómo y por qué vive en la actualidad este concepto en el ámbito escolar. Al momento se ha analizado su desarrollo socio-histórico al interior de la comunidad matemática y algunos aspectos del tratamiento del concepto en el ámbito educativo uruguayo: libros de texto y prácticas educativas concretas, buscando explicitar el vínculo entre ambos contextos. Este análisis se desarrolla desde la aproximación socioepistemológica, permitiendo explicar de qué elementos se nutre la construcción social del conocimiento, específicamente del concepto de límite.*
Palabras clave: procesos de institucionalización, límite

Introducción

Esta investigación busca lograr una explicación acerca de cómo el saber matemático referido al límite de una función se volvió un saber institucionalizado. Para ello debemos considerar concepciones del conocimiento que brinden un marco para cuestionar su actual estado en la enseñanza a partir del análisis de sus procesos de construcción social.

Cordero (2006) distingue en la evolución de la matemática educativa como disciplina dos programas de investigación: los que prestan especial atención a los procesos cognitivos individuales y los que analizan la construcción del conocimiento en los escenarios socioculturales. Sin embargo, plantea que ninguna de estas aproximaciones permite explicar cómo un conocimiento se vuelve institucional -producto material social que debe ser enseñado y aprendido en las instituciones–, cómo los grupos se organizan, de qué se valen y qué métodos utilizan para constituir dicho conocimiento. Y ello porque ambas conciben al conocimiento como preexistente al sujeto que aprende, y descontextualizado de las prácticas de referencia que le dieron origen. Se hace necesaria entonces una concepción que se ocupe de explicar ya no cómo se construye el conocimiento –desde la perspectiva del individuo- sino cómo se constituye socialmente tal construcción, lo que permitiría explicar cómo un conocimiento se vuelve institucional.

Al reconocer la diferencia entre el Cálculo como saber y el Cálculo escolar, con una intencionalidad didáctica específica pero no siempre explícita, surge interés por analizar el estatus del cálculo en las instituciones educativas. Esta perspectiva permite entender la coexistencia en el sistema escolar de por lo menos dos concepciones: una más cercana a lo que es el Cálculo como 'saber' –institucionalizado a través de los libros de texto y de una tradición de enseñanza–, con conceptos y definiciones explícitas y centrada básicamente en los conceptos de función, límite, derivada e integral. Y otra que enfatiza el carácter intencional didáctico, centrada en los significados situacionales de los conceptos del anterior: predicción, graficación y analiticidad (Cordero, 2006).

Desde la perspectiva socioepistemológica se ha trabajado para robustecer esta última concepción centrada en las prácticas sociales que generan el conocimiento, especialmente en la rama del Cálculo (Cantoral y Farfán, 1998, 2003; Cordero, 2006; Montiel, 2005). Sin embargo, la presente investigación propone analizar la primera de las concepciones –el Cálculo como saber-, ya que es la más difundida en el ámbito educativo uruguayo al punto de establecerse como un saber institucional ineludible en el diseño curricular de todo curso de Cálculo. Se espera así instaurar un debate sobre la construcción del concepto de límite. Investigar los aspectos que constituyen tal construcción permitirá brindar una explicación acerca de cómo el límite como saber matemático se volvió un saber institucionalizado.

La investigación tiene por objetivo realizar un análisis socioepistemológico de los procesos de institucionalización del concepto de límite, para explicitar las razones por las que se presenta en el ámbito escolar de la manera en que se hace actualmente. Una de las hipótesis que surge de tal análisis, es que la formalización y la generalización operarían como *prácticas sociales* durante el proceso de institucionalización del concepto. Ambas prácticas estarían ejerciendo un rol normativo sobre las decisiones que se han ido tomando en la matemática escolar conduciendo al hecho de que se debía aprender determinado concepto de límite, con determinado papel en la estructura del cálculo y de determinada manera.

Antecedentes y justificación

1. El discurso matemático escolar en Uruguay

En muchos países la concepción subyacente es la de un cálculo escolar estructurado alrededor de los conceptos de función, límite, derivación e integración. Existiría un supuesto implícito según el cual sin el tratamiento formal en la enseñanza de estos conceptos, en particular del de límite, no hay cálculo (Alanís, 2000). El análisis del discurso matemático escolar en Uruguay desarrollado hasta el momento sugiere que no escapa de lo anterior. Se suele favorecer un tratamiento predominantemente algorítmico, sin considerar actividades tendentes a priorizar abordajes más intuitivos. Se suelen también dejar de lado herramientas y argumentos propios de la génesis y evolución del concepto que apunten a su resignificación dentro del escenario sociocultural específico en el que se está re-construyendo.

Para dar cuenta del por qué de ese tratamiento es necesario analizar los procesos de institucionalización que llevaron a que el concepto de límite esté tan arraigado hoy como estructurador de todo curso de cálculo. Esto implica indagar tanto los procesos propios de la estructuración formal de la matemática como aquéllos que se produjeron y producen en el ámbito escolar, entendido en un sentido amplio: las instituciones educativas propiamente dichas, sus actores, los libros de texto, los programas, etc.

2. La noción de límite en la investigación en Matemática Educativa

Las investigaciones alrededor del límite pueden estructurarse en tres grandes grupos según el polo de la tríada didáctica en la cual se centran. Se mencionan aquí algunas de las referencias más significativas: aspectos cognitivos (Tall y Vinner, 1981; Vinner,1991), aspectos epistemológicos (Cornu, 1986; Sierpinska, 1987; Dubinsky, 2000) y aspectos didácticos (Bokhari y Yushau, 2006). En ellas se intenta explicar por qué los estudiantes no aprenden el concepto de límite, cuáles son los procesos cognitivos y didácticos relacionados con su aprendizaje y cuáles son las posibles alternativas de abordaje escolar.

También se analizaron investigaciones que enfatizan los aspectos socio-históricos de la construcción del concepto (Bagni, 2005; Blázquez y Ortega, 2002) para investigar el desarrollo de la construcción social del concepto de límite.

3. El límite como un saber institucionalizado

En las investigaciones señaladas no se reflexiona en forma explícita sobre por qué debe enseñarse el tema, cómo devino en un saber institucional ineludible y cuáles son las características de los escenarios socioculturales en los que se desarrolló que promovieron la necesidad de su formalización hasta la forma que hoy en día conocemos. Ello sugiere que se asume como única a la concepción del Cálculo como saber, que ubica al concepto de límite como el centro de la estructura formal.

Se propone problematizar esta concepción para comenzar a dar cabida, en las prácticas educativas reales, a abordajes del cálculo basados en significados situacionales referidos a las prácticas sociales. Para ello se entiende necesario un análisis del cómo es que esta concepción del Cálculo y del límite en particular está tan arraigada en nuestros sistemas educativos, cómo es que ha llegado a establecerse como un saber institucional ineludible en el diseño curricular de todo curso de Cálculo. Responder el cuestionamiento planteado permitiría explicar a la comunidad cómo se enseña el Cálculo en la actualidad, cómo vive en el contexto escolar y cómo y por qué la matemática escolar llega a decidir que debemos enseñar y aprender *ese* concepto de límite.

Fundamentos teóricos

1. Socioepistemología

Por su carácter sistémico, entendemos que la socioepistemología es un marco adecuado para analizar los aspectos cognitivo, didáctico y epistemológico inherentes a los escenarios socioculturales en los que se produce el conocimiento. Este marco quiere precisamente dar cuenta de la naturaleza social del conocimiento matemático, cómo se produce su construcción social (Cantoral y Farfán, 2003).

La socioepistemología concibe a los saberes matemáticos como un bien cultural producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir la realidad (Martínez, 2005). Se distancia de otras al no concebir al conocimiento matemático como preexistente al sujeto que aprende, sino que analiza las circunstancias sociales, históricas y culturales de los escenarios en los que se produce y difunde. Dicho proceso está normado por *prácticas sociales* inherentes a determinados grupos humanos. Se entiende a las prácticas sociales como “un conglomerado de supuestos socialmente compartidos, mayoritariamente implícitos, que norman la actividad" (Lezama, 2007). Ellas permiten explicar la generación y difusión del conocimiento matemático.

2. Transposición Didáctica

La ***transposición didáctica*** (Chevallard, 1991) se refiere al conjunto de transformaciones adaptativas que sufre un saber desde que es designado como saber a enseñar hasta que se convierte en un objeto de enseñanza. Explica el tránsito del saber sabio al saber susceptible de ser enseñado. Sin embargo, este proceso no parece dar cuenta de cómo y por qué es que ese conocimiento se convirtió en un saber a enseñar, qué es lo que, como en el caso del límite, lo convirtió en un objeto central en la construcción y difusión del Cálculo.

Este proceso se relaciona estrechamente con el de la institucionalización, término que nos remite ineludiblemente a la Teoría de Situaciones Didácticas de Bruosseau (1997). En ella la institucionalización aparece como la etapa en la que el profesor brinda un estatuto cultural a las producciones que los estudiantes elaboraron a partir de una situación adidáctica. Su objetivo es lograr que el estudiante reconozca el conocimiento a aprender como un objeto de saber ya establecido en la estructura matemática. Bajo una visión socioepistemológica, al reconocer el carácter social del conocimiento matemático y tratar de dar cuenta de su socio-epistemología, esta etapa se convierte en todo un proceso, que es al que se refiere la investigación: este proceso trasciende al profesor y a su trabajo en el aula, explica más bien cómo llega ese conocimiento a su aula, a través de qué mecanismos y por qué.

3. Institucionalización al seno de la socioepistemología

Las instituciones se consideran en un sentido dinámico como "entidades que posibilitan la conservación de saberes en las sociedades a través del tiempo" (García-Torres, 2007) y desde esta óptica, se entiende a la construcción de instituciones específicamente vinculada al proceso de instituir prácticas. Las instituciones cumplen pues el rol de preservar el conocimiento. Las prácticas asociadas a ellas cumplen así una función normativa, permitiendo explicar por qué las cosas se hacen de determinada manera.

Desde la aproximación socioepistemológica, resulta interesante desentrañar los *procesos de institucionalización* del conocimiento matemático: cómo se integra un determinado saber al cuerpo socialmente aceptado de conocimientos matemáticos y cómo se desarrolla dicho saber en las instituciones educativas. Esto implica estudiar qué es lo que favorece que se instituya un determinado conocimiento y no otro, qué prácticas norman la decisión de que ese conocimiento se torne central para una determinada teoría y qué factores socioculturales influyen en su difusión. Este análisis no sólo explicaría cómo un conocimiento se preserva en el tiempo, sino también cómo evoluciona e innova (Covián, 2005; Tuyub, 2008).

Podemos reconocer al menos dos aspectos a analizar dentro de los procesos de institucionalización: cómo el conocimiento llega a institucionalizarse, transformándose en saber, dentro de la comunidad matemática, y cómo es el proceso dentro de la matemática escolar, para transformarse en un saber ineludible de ser enseñado y aprendido. Esta investigación se centra principalmente en el segundo.

En particular, se asume que la definición formal de límite (épsilon-delta) fue incluida en los currículos escolares como resultado de un proceso de institucionalización, a través del cual en algún momento y por alguna razón se fue decidiendo que eso era lo que debía enseñarse sobre el límite en los diferentes niveles escolares (último año de Educación Secundaria y primeros universitarios). A su vez, consideramos que esa formalización del conocimiento no necesariamente se produjo como respuesta a una necesidad escolar, sino que podría estar respondiendo a otras demandas sociales, o más específicamente a demandas propias de la comunidad matemática. Es probable que cada etapa en el proceso hacia la formalización haya sido el resultado de una búsqueda hacia la construcción o resignificación de un nuevo conocimiento, que no podía ser edificado con la concepción anterior. Parte de esta investigación se ocupa precisamente de dilucidar cuál es ese conocimiento nuevo que permitió cada paso hacia la formalización del concepto. Se busca dar cuenta de ese proceso, explicitarlo para detectar herramientas que sirvan, por un lado, para aportar elementos a la discusión sobre la pertinencia de la estructuración de los cursos de cálculo en torno a la definición de límite, y por otro, para un robustecimiento de las prácticas educativas en torno al concepto, en caso de que se considere apropiado su tratamiento escolar.

En definitiva se busca dar cuenta de la naturaleza social del proceso de institucionalización escolar del límite. Introducir el debate sobre si es pertinente esta estructuración del cálculo es de suma importancia para discursos matemáticos escolares como el del Uruguay, con una larga tradición formalista.

Avances de la investigación

Hasta el momento se ha avanzado, por un lado, en el *análisis socio-histórico* de la construcción del concepto de límite buscando profundizar en el primero de los aspectos mencionados: cómo el conocimiento llega a institucionalizarse, estructurándose e incorporándose al corpus de conocimiento aceptado por la comunidad matemática. Para los intereses de la investigación, además de identificar las etapas que transitó el concepto de límite hasta su configuración actual dentro de la comunidad matemática y matemática escolar, es importante dar cuenta de las necesidades socioculturales a las que responde cada una de ellas, así como de las prácticas sociales asociadas al tránsito entre las mismas.

Generalmente se ubican los primeros indicios del concepto de límite y consideraciones sobre el infinito en los métodos empleados por los antiguos griegos para calcular áreas (Método de exhaución de Eudoxo y las aplicaciones de Arquímedes y Euclides) así como en las paradojas de Zenón (Blázquez y Ortega, 2002; Bagni, 2005; Bertero y Trípoli, 2006). Este concepto fue evolucionando, transitando una primer etapa caracterizada por la búsqueda de soluciones a problemas con métodos infinitesimales, otra etapa de transformación de los fundamentos en la que el móvil era la generalización a más funciones y una tercera etapa caracterizada por la aritmetización, y con ello la formalización y la elaboración de la definición formal tal cual la concebimos hoy. Para el tránsito hacia esta etapa fueron factores determinantes la clarificación del concepto de función, la aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos y la evolución y extensión de la enseñanza de las matemáticas (Blázquez y Ortega, 2002). La difusión a un público creciente estaría promoviendo la clarificación y fundamentación del análisis para apoyarse en bases rigurosas. Formalización y generalización parecen ser móviles que favorecieron la construcción del concepto tal cual hoy lo conocemos.

Por otro lado, se ha analizado el *discurso matemático escolar* buscando respuestas al segundo de los aspectos vinculados a los procesos de institucionalización: cómo y por qué el saber llega a convertirse en ineludible en los programas. Se han considerado tres aristas: programas, libros de texto y cuestionarios a docentes con el fin de analizar las prácticas educativas y cuánto influyen los dos aspectos anteriores en la labor docente. Se ha venido constatando, tanto en libros de texto como en las prácticas educativas, el arraigo de la idea de que el límite es el concepto estructurador del Cálculo. Los profesores coinciden en que es un contenido necesario en todo curso de Cálculo, algunos por convicción personal y otros porque así lo exige el programa o la tradición. Estos comentarios servirán de insumo para robustecer el análisis de la institucionalización del concepto de límite, dando cuenta de cómo es que el concepto se enseña hoy y cuál es el lugar que ocupa en los cursos.

Referencias bibliográficas

Alanís, J. (2000). La predicción: un hilo conductor para el desarrollo de un curso de cálculo. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del cálculo infinitesimal*, (pp. 233-246). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bagni, G. (2005) Historical Roots of limit notion. Development of its representation registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5(4), 453-468.

Bertero, F. y Trípoli, M. (2006). *Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Nacional de La Plata. Argentina.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas* 30, 67-84.

Bokhari, M. A. Y Yushau, B. (2006). Local (L, ε)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 37(5), 515–526.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield Eds. y Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(1), 27-40.

Chevallard*, Y. (1991). La transposición didáctica: del* saber sabio *al* saber *enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar: una visión socioepistemológica. En Cantoral et al. (ed.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Cornu, B. (1986). Les principaux obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Bulletin IREM – APMEP* 352*,* 55- 63.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura may*a. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investivación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Dubinsky, E. (2000) A theory-based approach to help students learn post-secondary mathematics: The case of limits. *Research reports in mathematics education* 1, Umea University, 1-18.

García-Torres, E. y Cantoral, R. (2007). Un estudio sobre los procesos de institucionalización de las prácticas en ingeniería biomédica. En G. Buendía y G. Montiel (eds.) *Memorias de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp. 483 – 494)*.* Mérida, Yucatán: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Lezama, J. (2007). Una mirada a la investigación en el campo académico de la Matemática Educativa en América Latina. Artículo en extenso para la *Conferencia magistral por invitación del Congreso Internacional Virtual de la Enseñanza de las Matemáticas*. U. de G. y ANPM, México.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 195-218.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151–169.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica: un modelo de la construcción social del conocimiento*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65 - 81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.