Jedan informatički zadatak i $\lfloor x \rfloor$

Ana Virag

Nedavno se u 1. kolu Hrvatske programerske lige pojavio zadatak zanimljiv u matematičkom smislu, pa ćemo se u ovom broju PlayMatha pozabaviti njegovom problematikom. Evo zadatka:

Neki će se možda nemalo iznenaditi kad čuju da Slavko, osim riječi, obožava i brojeve. Pogotovo vrlo velike brojeve. U zadnje vrijeme Slavko se bavi faktorijelima.
Faktorijel broja definira se ovako:

$$n! = 1 * 2 * 3 * ... * n$$

$$0! = 1$$

Ista stvar može se zapisati i rekurzivno:

$$0! = 1$$

$$n! = n * (n-1)!$$

Kolikogod voli vrlo velike brojeve, faktorijeli su ga počeli mučiti jer su postali toliko veliki da mu je ponestalo papira za zapisivanje. Ipak, primijetio je da bi mogao znatno uštedjeti na papiru kada bi zapisao sve znamenke osim nula na kraju. Napiši program koji izračunava koliko nula ima na kraju faktorijela učitanog broja.

Hm... na prvi pogled zadatak se može učiniti teškim. Ali nakon drugog čitanja i razmišljanja kojim (matematičkim) 'alatom' raspolažemo, sinut će nam lijepa ideja koja bez previše 'kopanja' (dugački račun u kojem lako dolazi do zabune) dovodi do elegantnog rješenja. A taj ključni (za ovaj zadatak, naravno) matematički alat kojim matematičari barataju zove se, punim imenom, prezimenom i titulom: NJEGOVO VELIČANSTVO FUNKCIJA NAJVEĆE CIJELO OD x ili $\lfloor x \rfloor$ (nakon što vidite koliko će nam ta funkcija skratiti posao i vi ćete se složiti da je titula bezrezervno zaslužena). Jedna od primjena ove funkcije je ta da pronalazi eksponent s kojim prost broj (kreativno ga nazovimo p kao prost) p ulazi u $n!$, odnosno, jednostavnijim rječnikom rečeno, pomoću nje možemo odrediti koliko se puta neki prost broj p pojavio kao faktor u broju $n!$. Svaki broj pa i $n!$ ima svoj *kanonski zapis* tj.

$$n! = p_1^{e_{p_1}} \cdot p_2^{e_{p_2}} \cdot \dots \cdot p_k^{e_{p_k}},$$

gdje su $p_1, p_2, \dots, p_k$ različiti prosti brojevi. Svaki je eksponent (i kod njega ćemo kreativno okoristiti slovom e kao eksponent) e_{p_i} jednak:

$$e_{p_i} = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_i^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_i^3} \right\rfloor + \dots$$

Nakon pet dugih minuta zurenja u niz 'upali nam se lampica' (ili odmah čitamo članak dalje pa nam se ništa ne upali) i uočimo da niz napisan s desne strane jednakosti uopće nije beskonačan, ma koliko nas se trudio u to uvjeriti jer nakon nekog vremena, od nekog broja a (on jedini, siroče, nema izravan povod za svoje ime) nadalje postaje:

$$0 < \frac{n}{p^a} < 1$$

odnosno, za a i sve veće brojeve od a postaje:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^a} \right\rfloor = 0.$$

A sada za vas, dame i gospodo:

Dokaz gornje tvrdnje. Dakle, onaj teži dio (dosad je bilo lako, mora se priznati). Ponovno izoštrimo osjetila i matematičku intuiciju i uvidimo da je broj višekratnika broja p koji se pojavljuje među brojevima $1, 2, \ldots, n$ jednak točno $\lfloor n/p \rfloor$. Isto tako, broj višekratnika broja p^2 koji se pojavljuju među brojevima $1, 2, \ldots, n$ jednak je točno $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$, a broj višekratnika broja p^3 koji se pojavljuju među brojevima $1, 2, \ldots, n$ jednak je točno $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$ i tako dalje. (Sad smo već na pola puta, još malo.) Traženi eksponent je baš zbroj $\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \ldots$ zato što je svaki među brojevima $1, 2, \ldots, n$ koji je ujedno i višekratnik od p^k, i nije višekratnih od p^{k+1} brojen točno k puta (kao višekratnk od p, p^2, p^3, p^4, $\ldots$, p^k), dakle svi će p-ovi biti izbrojani onoliko puta koliko se pojavljuju, što je i trebalo dokazati. ■

Sad kad imamo formulicu, vratimo se našem Slavku brojoljupcu iz zadatka s početka priče. Broj $n!$ imat će onoliko puta nulu na kraju koliko puta se u njemu pojavljuju broj 2 i broj 5 kao faktori. Odmah vidimo da će se broj dva pojaviti puuuuuuuunoooooo više puta negoli broj 5, pa će zato produkt $n!$ imati onoliko nula na kraju koliki je eksponent broja 5, a to lako izračunamo uvrštavanjem u formulu:

$$e_p = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \ldots$$

odnosno:

$$e_5 = \lfloor n/5 \rfloor + \lfloor n/5^2 \rfloor + \lfloor n/5^3 \rfloor + \ldots$$

Znači ovaj zadatak bismo riješili koristeći funkciju int (u nekim programskim jezicima floor). Te bi smo sve jednostavno stavili u petlju:

```
repeat
o:=int(n/exp(ln (5)*(i+1)));
i:=i+1;
e:=e+o;
until(o=0)
```

Eto, time što smo vrlo jednostavno i elegantno riješili zadatak, došao je i kraj našem druženju. Puno pozdrava do sljedećeg broja.

Za razmišljanje

1. S koliko nula završava $n!$ u bazi 7?
2. Dokaži da $n!$ ima jednak broj nula u bazi 15 i u bazi 10.
3. Dokaži da $\dfrac{n!}{2^n} \notin \mathbb{N}$, za $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. Koliko ima brojeva manjih ili jednakih 100 djeljivih ili s 2 ili s 3 (broje se i oni koji su djeljivi sa 6)?

UPUTE I RJEŠENJA NA STRANICI 45.