

PROJEKTIVE KLASSEN ENDLICHER GRUPPEN

IIa. Gesättigte Formationen: Ein allgemeiner Satz von
Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ

Peter Förster

Eine Formation ist eine Klasse (endlicher) Gruppen, die gegenüber Bildung von homomorphen Bildern und subdirekten Produkten abgeschlossen ist; man nennt sie gesättigt, wenn mit der Frattinifaktorgruppe einer Gruppe stets auch die Gruppe selbst zu ihr gehört. Gesättigte Formationen sind also gerade diejenigen Formationen, die gleichzeitig Schunckklassen sind. Die von Gaschütz begründete Theorie der gesättigten Formationen hat neben einem einheitlichen und einfachen Zugang zu klassischen Ergebnissen der Theorie endlicher Gruppen auch schöne neue Resultate hervorgebracht. Grundlage dieser Theorie ist der Satz von Gaschütz und Lubeseder, der die gesättigten Formationen endlicher auflösbarer Gruppen als die sog. lokal erklärbaren beschreibt; dabei ist unter lokaler Erklärbarkeit die Tatsache zu verstehen, daß die Zugehörigkeit einer Gruppe zu einer solchen Klasse durch die Zugehörigkeit der von ihr auf ihren Hauptfaktoren induzierten Automorphismengruppen zu gegebenen Formationen (in Abhängigkeit von der Charakteristik des Hauptfaktors) kontrolliert wird. Dieser Satz ist nun kürzlich (von Baer bzw. Schmid) in zwei verschiedene Richtungen hin vom Universum der endlichen auflösbaren Gruppen auf das Universum aller endlichen Gruppen ausgedehnt worden.

* Teil einer Arbeit, die dem Fachbereich Mathematik der J.Gutenberg-Universität Mainz als Habilitationsschrift vorgelegt wurde.

Erstes Ziel dieser Arbeit ist es, einen Satz zu gewinnen, der diese beiden Verallgemeinerungen umfaßt (und selbst ersichtlich keiner sinnvollen Verallgemeinerung Anlaß bietet): Damit beantworten wir eine von Doerk und Hawkes in [8] aufgeworfene Frage. Gleichzeitig wollen wir den Beweis dieses Satzes so gestalten, daß wir einerseits — bis auf Teile, wo dies naturgemäß nicht möglich ist — mit recht elementaren Hilfsmitteln auskommen, andererseits aber ein Analogon der von Cossey und Oates-Macdonald gefundenen Beschreibung des Abschlußoperators für gesättigte Formationen als Nebenresultat erhalten, wobei wir sogar noch das ursprüngliche Ergebnis verbessern können: Dies löst dann ein in [6] gestelltes Problem. Die benutzten elementaren und darstellungstheoretischen Hilfsmittel machen nicht nur den Satz selbst leicht zugänglich und verständlich, sondern liefern auch auf einfache Weise verschiedene Ergebnisse verwandter Art.

Im ersten Abschnitt führen wir zu diesem Zweck eine sog. verallgemeinerte Fittinggruppe ein, die für beliebige endliche Gruppen das leistet, was von der gewöhnlichen Fittinggruppe für endliche auflösbare Gruppen bekannt ist. Ihre elementaren Eigenschaften liefern zusammen mit tieferen Ergebnissen über Darstellungen und Frattinierweiterungen von Gruppen den Schlüssel für unsere Hauptergebnisse; und es scheint diese Begriffsbildung auch über die Formationentheorie hinaus von Interesse zu sein.

Nachdem wir im zweiten Abschnitt eine verallgemeinerte Frattinigruppe konstruiert haben, können wir einen allgemeinen Sättigungsbegriff so formulieren, daß er den obengenannten wie auch den von Baer für seinen Satz benutzten umfaßt und sich außerdem mit einem entsprechenden Begriff von lokaler Erklärbarkeit für Formationen als äquivalent erweist (Abschnitt 3).

Diese Arbeit wurde am Forschungsinstitut für Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich begonnen, dem der Autor an dieser Stelle für dessen Gastfreundschaft danken möchte.

Wir benutzen hier durchweg die im ersten Teil [0] dieser Arbeit erklärten Bezeichnungen und Vereinbarungen und zitieren Ergebnis $x.y$ aus [0] als I.x.y.

1. Eine verallgemeinerte Fittinggruppe.

Bender hat in [3] eine Verallgemeinerung der Fittinggruppe $F(G)$ einer endlichen Gruppe G durch

$$F^*(G) = F(G)C_G(F(G)) \cap S(G \text{ mod } F(G)) \quad (\cong F(G))$$

definiert, welche die Eigenschaft $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$ hat. Für die Theorie der gesättigten Formationen endlicher Gruppen benötigt man nun aber eine Art verallgemeinerter Fittinggruppe $F'(G)$, die sich zusätzlich beim Übergang von G zu $G/\phi(G)$ gutartig verhält. M.a.W., man wird folgende Eigenschaften verlangen:

$$(1) \quad C_G(F'(G)) \leq F'(G) \quad (\text{d.h., } C_G(F'(G)) = Z(F'(G)));$$

$$(2) \quad \phi(G) \leq F'(G) \quad \text{und} \quad F'(G/\phi(G)) = F'(G)/\phi(G);$$

$$(3) \quad F'(G/\phi(G)) \leq S(G/\phi(G)) \quad (\text{wobei (1+2) sogar Gleichheit erzwingt}).$$

Die gewöhnliche Fittinggruppe $F(G)$ hat nur die in (2+3) beschriebenen Eigenschaften, die Bendersche hingegen genügt lediglich den Bedingungen (1+3). Jedoch läßt sich ein F' mit den gewünschten Eigenschaften leicht finden, nämlich

$$F'(G) = F^*(G \text{ mod } \phi(G)) \quad \text{für alle } G \in E.$$

Eine offenbar äquivalente Definition entnimmt man dem folgenden Satz.

1.1 SATZ. *Der einzige Funktor F' , der jedem $G \in E$ eine charakteristische Untergruppe $F'(G)$ mit den obigen Eigenschaften (1-3) zuordnet, wird durch*

$$F'(G) = S(G \text{ mod } \phi(G))$$

gegeben.

Beweis. Wird $F'(G)$ wie im Satz definiert, so sind (2+3) trivialerweise erfüllt. Zum Nachweis von (1) darf daher o.B.d.A. $\phi(G) = 1$ angenommen werden.

Wäre $C_G(F'(G)) \not\leq F'(G)$, so existierte ein minimaler Normalteiler von G/D

$$C/D \leq C_G(F'(G))/D \quad \text{mit} \quad D = F'(G) \cap C_G(F'(G)) = Z(F'(G)) \leq Z(C_G(F'(G))).$$

Wegen $\phi(G) = 1$ besitzt der abelsche Normalteiler D von C dann ein Komple-

ment K in C :

$$C = D \times K;$$

dabei gilt offenbar $D = F(G) \cap C = F(C)$, so daß $K \cong C/D$ wegen $D \trianglelefteq Z(C)$ nicht abelsch ist. Deshalb erzwingt die Wahl von C/D als minimaler Normalteiler von G/D schon

$$K = C' \trianglelefteq G,$$

und dies führt dann zu dem Widerspruch $K \trianglelefteq S(G) = F'(G)$, $C = D \times K \trianglelefteq F'(G) \cap C_G(F'(G)) = D$.

F' ist also ein Funktor von der verlangten Art, und auch der einzige, wie unmittelbar aus (1-3) folgt. \square

Im Rest dieses Abschnittes stellen wir einige elementare Eigenschaften von F' zusammen, die es gestatten, Sätze aus der Theorie der gesättigten Formationen, wie etwa die Schmidtsche Version des Gaschütz-Lubeseder-Satzes, bequem zu beweisen.

Unser erstes Ergebnis besagt u.a., daß $F'(G \bmod O_p(G))$ für beliebige endliche Gruppen G eine ähnliche Rolle spielt wie $O_{p',p}(G) (= F(G \bmod O_p(G)))$ für p -auflösbare Gruppen G . Wir benötigen zu seiner Formulierung noch die Definition des Hauptfaktorenzentralisators $C_G^h(A/B)$ eines normalen Ausschnitts A/B in G : Für $A, B \trianglelefteq G$ mit $B \trianglelefteq A$ sei

$$\begin{aligned} C_G^h(A/B) &= \bigcap \{ C_G(H/K) \mid H/K \text{ Hauptfaktor von } G \text{ mit } B \trianglelefteq K \trianglelefteq H \trianglelefteq A \} \\ &= \bigcap_{i=1}^n C_G(A_i/A_{i-1}) \text{ für jede } G\text{-Hauptreihe } B = A_0 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq A_n = A. \end{aligned}$$

1.2 SATZ. (a) $O_{p'}(G) = 1$ gilt genau dann, wenn jeder Kompositionsfaktor von $F'(G)$ durch p teilbare Ordnung hat.

(b) Sei $A \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ eine p' -Gruppe für eine Gruppe G mit $O_{p'}(G) = 1$. Gibt es eine Kette $\Phi(G) = X_0 \trianglelefteq X_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq X_n = F'(G)$ mit $[A, X_i] \trianglelefteq X_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$, so ist $A = 1$.

(c) Ist $N \trianglelefteq G$ mit $O_p(N) = 1$, so ist $C_G^h[F'(N)/\Phi(N)]/C_G(N)$ eine p -Gruppe.

(Eine entsprechende Aussage gilt auch für Gruppen A , die auf N durch Automorphismen operieren.)

Beweis. (a) Im Falle $O_p(G) = 1$ ist natürlich $F(G) = O_p(G)$ und insbesondere $\Phi(G)$ eine p -Gruppe. Gäbe es einen p' -Kompositionsfaktor von $F'(G)$, so könnten wir also wegen der Definition von $F'(G)$ einen minimalen p -Normalteiler $T/\Phi(G) = F'(G)/\Phi(G)$ von $G/\Phi(G)$ finden. Anwendung des Frattini-Arguments auf eine p' -Hallgruppe von T liefert einen nicht-trivialen p' -Normalteiler von G , also einen Widerspruch. Die umgekehrte Implikation ist völlig trivial.

(b) Wir betrachten das semidirekte Produkt $H = AG$ und führen eine Induktion nach $|H|$ durch. Dann dürfen wir A als von Primzahlordnung $q \neq p$ annehmen.

Ist zuerst $\Phi(G) = 1$, dann ist $F'(G) = S(G)$ ein direktes Produkt $E_1 \times \dots \times E_n \times Z_p^{(1)} \times \dots \times Z_p^{(m)}$ mit einfachen nicht-abelschen Gruppen E_i von durch p teilbarer Ordnung und von Gruppen $Z_p^{(j)}$ der Ordnung p , und $F'(G)$ zerfällt in ein direktes Produkt A -irreduzibler Normalteiler von $F'(G)$, die nach Voraussetzung alle von A zentralisiert werden; man beachte hier $q \neq p$ und die Eindeutigkeit der direkten Zerlegung $(F'(G))' = E_1 \times \dots \times E_n$ (s. [12], I.12.5b). Es folgt

$$AF'(G) = A \times F'(G), \text{ insbesondere } A \leq C_H(F'(G)),$$

und wir erhalten mittels 1.1

$$C_H(F'(G)) = A \cap C_H(F'(G)) = A C_G(F'(G)) \leq AF'(G),$$

$$A \times F'(G) = C_H(F'(G)) F'(G) \triangleq H,$$

$$A = O_p(A \times F'(G)) \triangleq H \text{ sowie } [A, G] \leq A \cap G = 1.$$

Das liefert den Widerspruch $A = 1$.

Sei nun $\Phi(G) \neq 1$. Wegen (a) und 1.1 überträgt sich unsere Voraussetzung an A, G auf $A/C_A(G/\Phi(G)), G/\Phi(G)$, so daß der schon behandelte Fall $A = C_A(G/\Phi(G))$ zeigt; d.h., es ist

$$[A, G] \leq \Phi(G) \text{ und damit } A\Phi(G) \triangleq AG = H.$$

Das Frattiniargument, angewandt auf die q -Sylowgruppe A von $A\Phi(G)$ — man beachte $\Phi(G) \leq O_p(G)$ — schließlich führt zu

$$H = N_H(A)A\phi(G) = N_H(A)\phi(G) = N_H(A),$$

und der gleiche Widerspruch wie zuvor stellt sich ein.

(c) ist nur eine Umformulierung eines Spezialfalls von (b). \square

Im Falle $O_p(G) = 1$ besagt 1.2c, angewandt auf $N = G$, im wesentlichen

$$C_G^h(F'(G)/\phi(G)) = C_G(F'(G)/\phi(G)) = O_p(G),$$

was für p -separiertes G zu einem wohlbekannten Ergebnis führt: Dort ist ja $F'(G) = O_p(G)$; und für beliebiges G zeigt sich die p -Nilpotenz des p -Hauptfaktorenzentralisators von G . Für Gruppen G mit $O_p(G) = 1$ und $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ liefert Wahl von $N = O_p(G)$ das ebenso bekannte Ergebnis, daß $G/O_p(G)$ treu auf $O_p(G)/\phi(O_p(G))$ operiert.

F' zeigt das erwartete Vererblichkeitsverhalten bezüglich Übergang zu Faktorgruppen:

1.3 LEMMA. $F'(G)N/N \leq F'(G/N)$ für alle $N \trianglelefteq G$.

Beweis. Das folgt sofort aus $\phi(X)Y/Y \leq \phi(X/Y)$ und $S(X)Y/Y \leq S(X/Y)$ für alle Gruppen X, Y mit $Y \trianglelefteq X$. \square

Der Vollständigkeit halber vermerken wir noch bezüglich des Vererblichkeitsverhaltens von F' gegenüber Normalteilerbildung (vgl. aber auch 1.2.5):

1.4 LEMMA. $F'(N) \leq F'(G)$ für alle $N \trianglelefteq G$.

Beweis. Das erhält man leicht aus $\phi(N) \leq \phi(G)$ für alle $N \trianglelefteq G$ und dem folgenden wohlbekannten Lemma (s. etwa [1], 1.16). \square

1.5 LEMMA. Für $N \trianglelefteq G$ gilt stets $S(G) \cap N \leq S(N)$. Ist zusätzlich $\phi(G) \cap N = 1$, so ist sogar $S(N) \leq S(G)$ und damit $S(N) = N \cap S(G)$. \square

2. X-Frattinigruppe und X-Hauptfaktorenzentralisator.

Im nächsten Abschnitt wollen wir einen allgemeinen Satz vom Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ beweisen. Unter einem solchen Satz verstehen wir eine Aussage, die eine gewisse Art lokaler Erklärbarkeit von Formationen als gleichwertig mit einer entsprechenden Sättigungseigenschaft behauptet. Diese Eigenschaften werden wir im nächsten Abschnitt in Abhängigkeit von einer sog. \mathbb{P} -abgeschlossenen Klasse X einfacher Gruppen definieren, wobei wir ein $X \subseteq X_0$ als \mathbb{P} -abgeschlossen bezeichnen, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$E \in X, p \in \pi(E) \Rightarrow Z_p \in X;$$

wir erinnern daran, daß wir abkürzend oft auch $p \in X$ schreiben um auszudrücken, daß die zyklische Gruppe Z_p von Primzahlordnung p in X liegt.

Es liegt nahe, als Definition X -lokaler Erklärbarkeit einer Formation eine Bedingung zu wählen, die im wesentlichen dem üblichen Begriff lokaler Erklärbarkeit entspricht (wie er etwa in [12], VI.7.3 formuliert ist), aber auf X -Hauptfaktoren — also Hauptfaktoren aus der Klasse E_X aller endlichen Gruppen, deren sämtliche Kompositionsfaktoren aus X stammen — eingeschränkt wird. Für $X = X_0$ soll sich dabei der gewöhnliche Begriff lokaler Erklärbarkeit ergeben, wohingegen für $X = \mathbb{P}$ (genauer: $X = \{Z_p \mid p \in \mathbb{P}\}$) ein von Baer in der ursprünglichen Version seines Buches [1] eingeführter Begriff von "auflösbarer lokaler Erklärbarkeit" herauskommen soll. Entsprechende Überlegungen sind für einen geeigneten X -Sättigungsbegriff anzustellen, für den wir naturgemäß eine Art von X -Frattinigruppe einer beliebigen endlichen Gruppe benötigen. Im Hinblick auf das genannte Ziel hat eine solche im wesentlichen folgende Forderungen zu erfüllen:

- (1) $\Phi_X(G) \leq O_X(G) \cap \Phi(G)$ (mit $O_X(G) = G_{E_X}$, dem E_X -Radikal) — dies eine Bedingung, die erst einmal die Bezeichnung X -Frattinigruppe $\Phi_X(G)$ rechtfertigt;
- (2) $\Phi_X(G) \leq C_G^{h,X}(G)$ und $C_G^{h,X}(G/\Phi_X(G)) = C_G^{h,X}(G)$ — dabei stellt $C_G^{h,X}(A/B)$ für einen normalen Ausschnitt A/B von G den X -Hauptfaktorenzentralisator von

A/B in G dar, der durch

$$C_G^{h,X}(A/B) = \bigcap \{ C_G(H/K) \mid H/K \text{ X-Hauptfaktor von } G \text{ mit } B \leq K \text{ und } H \leq A \}$$

definiert wird, und diese Bedingung soll es ermöglichen, von X -lokaler Erklärbarkeit einer Formation auf deren X -Sättigung zu schließen;

(3) $\Phi(O_X(G)) \leq \Phi_X(G)$, und für $G \in \mathcal{P}_{II}$ mit $S(G) \in E_X$ gebe es zu jedem $p \in \pi(S(G))$ eine (von G, p abhängende) Gruppe H mit einem p -Normalteiler N derart, daß $G \cong H/N$, $N \leq \Phi_X(S(H \bmod N))$ und $C_H^h(N) \leq N$ ist — diese letzten Bedingungen besagen im wesentlichen, daß $\Phi_X(G)$ hinreichend groß ist (um den Schluß von X -Sättigung auf X -lokale Erklärbarkeit einer Formation zu gestatten); daneben haben wir selbstverständlich zu verlangen, daß $\Phi_X(G)$ gewissen unerläßlichen Vererblichkeitsbedingungen genügt, wie sie auch von der gewöhnlichen Frattinigruppe $\Phi(G)$ erfüllt werden; vgl. aber 2.5 (und 2.3) unten!

Problematisch, jedoch für den Beweis des Hauptergebnisses von Abschnitt 3 unabdingbar, ist hier lediglich der letzte Teil von Forderung (3). In der Tat könnte man ohne diesen einfach $\Phi_X(G) = \Phi(O_X(G))$ festsetzen und würde — wie wir noch einsehen werden — zum gewünschten Erfolg gelangen; in den Fällen $X = X_0$ und $X = \mathbf{TP}$ ist eine derartige Festsetzung wirklich möglich, wie aus dem folgenden grundlegenden Satz von Gaschütz hervorgehen wird (aus dem wir unten sogar die Erfüllbarkeit obiger Forderung für beliebiges \mathbf{TP} -abgeschlossenes $X \leq X_0$ ableiten werden):

2.1 SATZ. Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.

(a) Es existiert eine Gruppe H mit Normalteiler N mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $H/N \cong G$, $N \leq \Phi(H)$, und N ist eine elementarabelsche p -Gruppe;
- (ii) ist K irgendeine Gruppe mit Normalteiler L derart, daß $K/L \cong G$ und $L \leq \Phi(K)$ gelten sowie L elementarabelsche p -Gruppe ist, so existiert ein Epimorphismus ω von H nach K mit $N^\omega = L$.

(b) Fassen wir N via $H/N \cong G$ als G -Modul über $GF(p)$ auf, so läßt sich N

wie folgt beschreiben:

Bezeichnet 1_G^P den irreduziblen, trivialen $GF(p)[G]$ -Modul und $P(1_G^P)$ seine projektive Hülle sowie $R = \text{Rad}(P(1_G^P))$ deren Radikal, so sei A ein Untermodul der projektiven Hülle $P(R) = P(R/\text{Rad}(R))$ von R mit $P/A \cong R$; dann besteht die $GF(p)[G]$ -Isomorphie

$$N \cong_G A.$$

(c) $C_G(\text{Soc}(A_p(G))) = O_{p',p}(G)$, wobei wir den $GF(p)[G]$ -Modul A aus (b), den sog. p -Frattinimodul von G , mit $A_p(G)$ bezeichnet haben.

(Siehe die Arbeit [9] von Gaschütz für einen Beweis der Teile (a+b) von 2.1. Für einen ausführlichen Beweis des gesamten Satzes sei auch auf [1] verwiesen. Teil (c) von 2.1 wurde explizit zuerst in [10] formuliert; wir werden im folgenden mit der elementarer zu beweisenden Aussage $C_H^h(A_p(G)) = O_{p',p}(H \text{ mod } N)$ — also $C_G^h(A_p(G)) = O_{p',p}(G)$ — auskommen — letztere Aussage ist ebenfalls in [1] bewiesen, wo auch einige im hier behandelten Zusammenhang interessierende Zusätze und Bemerkungen zu finden sind.)

Im Anschluß an diesen Satz scheint die folgende Vermutung nicht völlig abwegig zu sein:

VERMUTUNG. Ist $G \in \mathcal{P}_{II}$ und E die Charakteristik von $S(G)$ sowie $p \in \pi(E)$, so gibt es eine Gruppe \bar{H} mit elementarabelschem p -Normalteiler $\bar{K} = \Phi(S(\bar{H} \text{ mod } \bar{K}))$ mit $G \cong \bar{H}/\bar{K}$ und $C_H^h(\bar{K}) = \bar{K}$.

Da uns ein Beweis dieser Vermutung (durch Anwendung von 2.1!) bislang nicht gelungen ist, werden wir jetzt auf andere Weise eine X -Frattinigruppe mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren. Später werden wir noch belegen, daß eine solche Konstruktion auch von selbständigem Interesse ist, und zwar gerade im Hinblick auf unseren Satz vom Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ.

Für den Rest des vorliegenden Textes machen wir die

GENERALVORAUSSETZUNG. X ist eine \mathbb{P} -abgeschlossene Klasse einfacher Gruppen, und p bezeichnet (meist) ein Element von $X \cap \mathbb{P}$.

Wir erinnern ferner an die Festsetzungen $X_p = X \setminus E_p$, und $X' = X_0 \setminus X$ (insbesondere $X'_p = (X_p)' = X_0 \setminus X_p$), wobei X_p, X' nicht unbedingt der Generalvoraussetzung genügen.

Zuerst definieren wir eine X - p -Frattinigruppe $\Phi_X^p(G)$ von G durch

$$\Phi_X^p(G) = \begin{cases} \Phi(G \text{ mod } O_p(G)), & \text{falls } F'(G/O_p(G)) \in E_{X_p} \\ \Phi(O_X[G \text{ mod } O_p(G)] \text{ mod } O_p(G)), & \text{sonst} \end{cases}$$

m.a.W., es sei $O_p(G) \leq \Phi_X^p(G)$ und $\Phi_X^p(G)/O_p(G) = \Phi(G/O_p(G))$ oder $\Phi(O_X(G/O_p(G)))$, je nachdem, ob $F'(G/O_p(G))$ lauter Kompositionsfaktoren aus X_p hat oder nicht. (Wegen 1.2a hätten wir übrigens auch nur $F'(G/O_p(G)) \in E_X$ verlangen brauchen: Stets ist ja $F'(G/O_p(G)) \in E_{(X_0)_p}$.) Nunmehr können wir die X -Frattinigruppe $\Phi_X(G)$ von G festsetzen als

$$\Phi_X(G) = O_X(G) \cap \bigcap_{p \in \chi(X)} \Phi_X^p(G),$$

wobei wir mit $\chi(X) = \mathbb{P} \cap X$ die Charakteristik von X bezeichnen.

2.2 BEMERKUNGEN. (a) Sei

$$\Psi_X^p(G) = \begin{cases} O_p(\Phi(G)), & \text{falls } F'(G/O_p(G)) \in E_{X_p} \\ O_p(\Phi(O_X(G))), & \text{sonst} \end{cases};$$

dann gilt $\Psi_X^p(G) \leq \Phi_X(G)$. Für

$$\Psi_X(G) = \times_{p \in \chi(X)} \Psi_X^p(G)$$

ergibt sich daher $\Phi(O_X(G)) \leq \Psi_X(G) \leq \Phi_X(G)$.

(b) I.allg. ist $\Psi_X(G) < \Phi_X(G)$, wie man am Beispiel von $X = \mathbb{P}$ und $G = A_7 \times (A_5 \circ Z_{7^2})$ erkennt, wobei das Krantzprodukt bzgl. der Permutationsdarstellung der zyklischen Gruppe der Ordnung 7^2 auf den Nebenklassen ihrer Frattinigruppe zu nehmen ist: Es ist $\Psi_X(G) = 1$, aber $\Phi_X(G) = \Phi(G) = \Phi(Z_{7^2}) \neq 1$.

(c) Für $X = X_0$ gilt nach (a) und 2.3c weiter unten $\Phi(O_X(G)) = \Psi_X(G) = \Phi_X(G) = \Phi(G)$. Hingegen ist für $X = \mathbb{P}$ wegen (b) i.allg. $\Phi(O_X(G)) < \Psi_X(G) < \Phi_X(G) < \Phi(G)$;

Das Beispiel des semidirekten Produktes $G = \text{EGF}(p)[E]$ einer nicht-abelschen einfachen Gruppe E mit ihrem Gruppenring über $\text{GF}(p)$ für ein $p \in \pi(E)$ erfüllt nämlich $\phi(O_{\mathbb{P}}(G)) = \phi(\text{GF}(p)[E]) = 1 \triangleleft \text{Rad}(\text{GF}(p)[E]) = \psi_{\mathbb{P}}(G) = \phi_{\mathbb{P}}(G) = \phi(G)$ (beachte $F'(G) = \text{GF}(p)[E]$); und für $G = \text{SL}(2,5)$ ist $\phi(G) = Z(G) = O_{\mathbb{P}}(G) \cong Z_2$, aber $\phi_{\mathbb{P}}(G) = 1$ wegen $\phi_{\mathbb{P}}^2(G) = \phi(O_{\mathbb{P}}(G)) = 1$, denn wir haben $O_2(G) = 1$ und $F'(G) = G \not\in E_{\mathbb{P}}$.

Wir machen darauf aufmerksam, daß — wie sorgfältiges Lesen der unten gegebenen Beweise bestätigt — die im folgenden bewiesenen Aussagen über $\phi_X(G)$, soweit sie direkt für die Anwendungen im nächsten Abschnitt benötigt werden, auch auf $\psi_X(G)$ zutreffen; insbesondere gelten jene Ergebnisse dann auch mit $\psi_X(G)$ statt $\phi_X(G)$. Wir haben es hier vorgezogen, mit einer möglichst großen X -Frattinigruppe zu arbeiten: Dies ist sinnvoll für Anwendungen unseres verallgemeinerten Gaschütz-Lubeseder-Baer-Satzes, bei denen aus der X -lokalen Erklärbarkeit einer Formation deren X -Sättigung geschlossen wird. Für Anwendungen der umgekehrten Schlußweise ist natürlich die Verwendung einer möglichst kleinen X -Frattinigruppe angebracht, so daß man hier besser $\psi_X(G)$ benutzt — solange unsere oben formulierte Vermutung nicht bewiesen ist: Trifft sie zu, so sieht man ebenso wie für $\phi_X(G)$ und $\psi_X(G)$, daß unsere im folgenden bewiesenen Aussagen (in geeignet modifizierter Form) auch für $\phi(O_X(G))$ gültig sind.

Ferner weisen wir darauf hin, daß für $X \in \mathbb{P}$ die eingangs aufgestellte Forderung (3) in ihrem zweiten Teil leer ist. In diesem Fall kann gleichfalls wieder $\phi(O_X(G))$ genommen werden, wie aus den weiteren Überlegungen hervorgehen wird. Tatsächlich wurde auch, und zwar für $X = \mathbb{P}$, diese Wahl von Baer (im ursprünglichen Manuskript von [1]) getroffen. Unser allgemeiner Satz vom Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ im nächsten Abschnitt wird also einerseits den Baerschen Satz umfassen (wenn man $\phi(G_S) = \phi(O_{\mathbb{P}}(G))$ statt $\phi_{\mathbb{P}}(G)$ dort einsetzt), andererseits aber für einen Teil eine verschärfte Aussage liefern.

In diesem Zusammenhang vermerken wir abschließend, daß sich der erste Teil obiger Forderung (3) an eine X -Frattinigruppe $\Phi_X^*(G)$ zu $\Phi(O_p(G)) \leq \Phi_X^*(G)$ für alle $p \in X(X)$ abschwächen läßt: Dies reicht noch immer zum Beweis unseres Hauptergebnisses aus (und liefert eine Möglichkeit, eine recht kleine X -Frattinigruppe zu konstruieren — worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen).

2.3 LEMMA. (a) $\Phi_X^D(G)$ und $\Phi_X(G)$ sind charakteristische Untergruppen von G .

(b) $O_p(G) \leq \Phi_X^D(G) \leq O_{p',p}(G)$, $\Phi_X^D(G)/O_p(G) = \Phi_X^D(G/O_p(G)) \leq F(G/O_p(G)) = O_p(G/O_p(G))$.

(c) $\Phi(O_X(G)) \leq \Phi_X(G) \leq \Phi(G) \cap O_{X(X)}(G)$.

(d) Ist $N \trianglelefteq G$ in $\Phi_X^D(G)$ bzw. $\Phi_X(G)$ enthalten, so gilt $\Phi_X^D(G/N) = \Phi_X^D(G)/N$ bzw. $\Phi_X(G/N) = \Phi_X(G)/N$.

Beweis. (a,b) Die Aussagen folgen trivial aus den relevanten Definitionen und aus $\Phi(G) \leq F(G)$.

(c) Die erste Inklusion folgt aus $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ und $\Phi(N) \leq \Phi(G)$ für $N \trianglelefteq G$. Nach (b) und wegen seiner Definition ist $\Phi_X(G)$ eine p -nilpotente Gruppe für alle $p \in X(X)$, was $\Phi_X(G) \leq F(G) \cap O_{X(X)}(G)$ bewirkt. Weiter gilt für die p -Sylowgruppen $O_p(\Phi_X(G))$ von $\Phi_X(G)$:

$O_p(\Phi_X(G))O_p(G)/O_p(G) = \Phi_X(G)O_p(G)/O_p(G) \leq \Phi_X^D(G/O_p(G)) \leq \Phi(G/O_p(G))$.
Der verschärften Version I.1.4 des Jordan-Hölder-Satzes entnimmt man daher sofort $O_p(\Phi_X(G)) \leq \Phi(G)$.

(d) Natürlich genügt der Nachweis der Behauptungen über $\Phi_X^D(G)$.

Deren erste ist nach Definition klar, falls $N \trianglelefteq O_p(G)$ gilt. Induktives Vorgehen erlaubt es also offenbar, N als einen p -Normalteiler von G anzunehmen, und auch dann ist die Behauptung sofort einzusehen, sobald nur $O_p(G/N) = O_p(G)N/N$ geklärt ist: Es ist dann nämlich wegen I.1

$$F'((G/N)/O_p(G/N)) = (F'(G \text{ mod } O_p(G))/N)/(O_p(G)N/N),$$

und anschließend folgt alles weitere. Ist aber $K = O_p(G \text{ mod } N)$ sowie

$F^* = F'(G \text{ mod } O_p(G))$, so gilt sicher $[K, F^*] \leq K \cap F^* = N \times O_p(G)$, so daß K aufgrund von $NO_p(G)/O_p(G) \leq \phi(G/O_p(G))$ nach 1.2c eine p -nilpotente Gruppe ist. Damit ist $O_p(K) = O_p(G)$ und $K = N \times O_p(G)$. \square

Wir definieren nun für jede Gruppenklasse H

$$E_{\phi_X} H = \{G \in E \mid G/N \in H \text{ für ein } N \trianglelefteq G \text{ mit } N \leq \phi_X(G)\}$$

und nennen H X -gesättigt, falls $H = E_{\phi_X} H$ gilt. Ferner setzen wir fest:

$$E_{\phi}^* H = \{G \in E \mid G/N \in H \text{ für ein } N \trianglelefteq G \text{ mit } N \leq \phi(G) \text{ und } (H/K)^* G \in H \text{ für alle Hauptfaktoren } H/K \text{ von } G \text{ unterhalb } N\}.$$

2.4 LEMMA. E_{ϕ_X} und E_{ϕ}^* sind Abschlussoperatoren.

Beweis. Für E_{ϕ_X} folgt das aus 2.3d, für E_{ϕ}^* ist es trivial. \square

Aus beweistechnischen Gründen werden wir uns später meist mit ϕ_X^p zu befassen haben: Es gilt nämlich i.allg. nicht etwa $\phi_X(G)N/N \leq \phi_X(G/N)$ oder $\phi_X(N) \leq \phi_X(G)$ für alle $N \trianglelefteq G$. Deshalb erwähnen wir noch eine weitere triviale Folgerung aus 2.3, die später an wesentlicher Stelle einght:

2.5 BEMERKUNGEN. (a) Für $N \trianglelefteq G$ ist weder stets $\phi_X(G)N/N \leq \phi_X(G/N)$ noch $\phi_X(N) \leq \phi_X(G)$.

(b) $O_p(G) = 1$ impliziert $\phi_X(G) = \phi_X^p(G)$.

Beweis. (a) $\phi_X(G)N/N \leq \phi_X(G/N)$ wird für $X = \mathbb{P}$ durch das semidirekte Produkt $G = HN$ mit $H = SL(2,5)$ und einem irreduziblen $GF(2)[H]$ -Modul N mit $C_H(N) = Z(H)$ widerlegt: man beachte $F'(G) = Z(H) \times N$, aber $F'(G/N) = G/N$. Bilden wir mit diesem G die Gruppe $G_0 = G \times A_5$, so sehen wir für das gleiche X auch $\phi_X(G) \not\leq \phi_X(G_0)$ ein.

(b) folgt aus 2.3 und den Definitionen. \square

Man könnte geneigt sein, $\phi_X'(G)$ einfach als den Durchschnitt aller maxima-

ten Untergruppen von G mit X' -Index (damit meinen wir $S(G/\text{Core}_G(U)) \in E_{X'}$) zu definieren. Jedoch kann man sich leicht überlegen (etwa am Beispiel der in 2.1 beschriebenen sog. maximalen Frattinierweiterung einer einfachen Gruppe $E \in X'$ mit p -elementarabelschem Kern für ein $p \in X(X) \cap \pi(E)$), daß dann unsere Forderung (2) vom Anfang dieses Abschnittes nicht zu gelten braucht. Für unser ϕ_X hingegen gilt sie, und zwar sogar in auf folgende Weise verschärfter Form:

2.6 LEMMA. Für $N \trianglelefteq G$ ist $C_G^{h,X,p}(F'(N/\phi_X^p(N))) = C_G^{h,X,p}(N)$ und $C_G^{h,X}(F'(N)/\phi_X(N)) = C_G^{h,X}(N)$.

Wir beweisen diese Aussagen nicht, da wir sie später nicht in expliziter Form verwenden, vielmehr im Beweis von 3.3 in einem Spezialfall direkt einsehen; die zum Beweis benötigten Argumente lassen sich aber prinzipiell dem Beweis von 3.3 entnehmen. Man bemerke jedoch, daß die schwächere Aussage $C_G^{h,X,p}(G/\phi_X^p(G)) = C_G^{h,X,p}(G)$ bzw. $C_G^{h,X}(G/\phi_X(G)) = C_G^{h,X}(G)$, die zu Anfang dieses Abschnittes erwähnt wurde, wegen 2.3c in Verbindung mit 1.2c gilt (obgleich sie für die geplante Anwendung im Hinblick auf die erste Aussage unter 2.5a nicht mehr ausreicht).

Die jetzt zu definierenden Gruppenklassen dienen zur Beschreibung des X_p -Hauptfaktorenzentralisators und seines E_p -Residuums:

$$Z_X^p = \{G \in E \mid C_G(H/K) = G \text{ für jeden } X_p\text{-Hauptfaktor } H/K \text{ von } G\},$$

$Y_X^p = Z_X^p \cap P_p$, wobei P_p die durch $b(P_p) = \{Z_p\}$ definierte Schunckklasse aller p -perfekten Gruppen (Gruppen ohne p -Faktorgruppe ungleich 1) darstellt.

2.7 LEMMA. (a) $Z_X^p = E_{X'} Z_X^p$ ist eine (in der Regel nicht gesättigte) Fittingformation.

(b) $C_G^{h,X,p}(G) = G Z_X^p$ ist das Z_X^p -Radikal von G , der größte in Z_X^p gelegene Normalteiler von G .

(c) $Y_X^p = E_{X_p} Y_X^p$ ist ein (in der Regel weder gesättigtes noch R_0 - oder S_n -abgeschlossenes) N_0 -abgeschlossenes Homomorph mit $Z_X^p = Y_X^p E_p$.

(d) $O^p(C_G^{h,X}(G)) = G_{Y_X^p}$ ist der größte in Y_X^p gelegene Normalteiler von G .

(e) Ist $G \in Y_X^p$ und H/K ein X_p -Hauptfaktor von G , so ist $H/K \in \Phi(G/K)$; insbesondere ist H/K eine p -Gruppe.

Beweis. (a) ist trivial — man argumentiere wie im Beweis von I.2.3.

(b) Wegen (a) existiert das Z_X^p -Radikal $G_{Z_X^p}$ von G , und es liegt, wie aus der Definition von Z_X^p hervorgeht, oberhalb von $C_G^{h,X}(G)$: Wir haben ja $C_G^{h,X}(G) \in Z_X^p$, da ein Hauptfaktor von G in einem Normalteiler N von G in ein direktes Produkt von Hauptfaktoren von N zerfällt. Umgekehrt zentralisiert $G_{Z_X^p}$ aus dem gleichen Grund jeden X_p -Hauptfaktor von G .

(c) Man bemerke $OY_X^p = Y_X^p$ und wende sodann I.2.2b auf $b(Y_X^p) = b(Z_X^p) \cup \{z_p\}$ an.

(d) folgt unmittelbar aus (c).

(e) ist nun ebenfalls klar. \square

Für $X = X_0$ ist selbstverständlich $Z_X^p = E_p, E_p$ und $Y_X^p = E_p$. Allgemein jedoch ist Z_X^p nicht einmal abgeschlossen bezüglich Bildung von Untergruppen, und es ist auch nicht möglich, diese Klasse als $E_{X^*} E_p$ für ein $X^* \in X_0$ zu beschreiben. Man überlegt sich aber leicht, daß Z_X^p eine X -gesättigte Formation ist. Die Klasse Y_X^p ist als Durchschnitt einer Formation und einer Schunk-Klasse immerhin noch eine sog. Präformation, d.h. eine \overline{QR}_0 -abgeschlossene Gruppenklasse; vgl. Kap. III von [1].

Für spätere Verwendung führen wir noch folgende Bezeichnung ein:

$$Y_X = \bigcap_{p \in X(X)} Y_X^p.$$

3. X-lokale und X-gesättigte Formationen — ein allgemeiner Satz vom Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ.

Unter einer *X-Formationenfunktion* f (für \mathbb{P} -abgeschlossenes X) wollen wir eine Abbildung verstehen, bei der jedem $p \in X \cap \mathbb{P}$ und jedem $E \in X'$ eine (eventuell leere) Formation $f(p)$ bzw. $f(E)$ zugeordnet wird.

Ist eine solche *X-Formationenfunktion* f gegeben, so definieren wir die durch f *X-lokal erklärte Formation* $LF_X(f)$ als die Klasse aller Gruppen $G \in E$, die den folgenden beiden Bedingungen genügen:

(i) Ist H/K ein Hauptfaktor von G , dessen Charakteristik aus X stammt, so sei $G/C_G(H/K) \in f(p)$ für alle $p \in \pi(H/K)$; und

(ii) $G/L \in f(E)$ für alle $L \trianglelefteq G$ mit monolithischem G/L derart, daß die Charakteristik von $S(G/L)$ die Gruppe $E \in X'$ ist.

Als erstes halten wir fest, daß es sich bei $LF_X(f)$ tatsächlich um eine Formation handelt:

3.1 LEMMA. $LF_X(f) = \bigcap_{p \in X(X)} Z_X^{D, \circ f(p)} \cap \bigcap_{E \in X'} E_{E, \circ f(E)}$; insbesondere ist $LF_X(f)$ eine Formation.

Hierbei haben wir folgende Notation benutzt:

$$Z_X^{D, \circ f(p)} = \begin{cases} Z_X^{D, \circ f(p)}, & \text{falls } f(p) \neq \emptyset \\ E_{X, p}, & \text{sonst} \end{cases}, \quad E_{E, \circ f(E)} = \begin{cases} E_{E, \circ f(E)}, & \text{falls } f(E) \neq \emptyset \\ E_{E, 1}, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Man beachte, daß oft E_p , in anderem Zusammenhang die Klasse aller Gruppen von p -Ordnung bezeichnet, während $E_E = E_{\{E\}}$, in der zweiten Gleichung für die Klasse aller Gruppen ohne Kompositionsfaktor isomorph zu E steht, und zwar auch dann, wenn E eine zyklische Gruppe von einer Primzahlordnung p ist und dann von uns an anderer Stelle gelegentlich kurz als p geschrieben wird.)

Beweis. Wir bezeichnen mit F die durch die rechte Seite der Gleichung für $LF_X(f)$ definierte Gruppenklasse und stellen fest, daß sie als Durchschnitt

von Formationen (wie man 2.7a entnimmt) wiederum eine Formation ist.

Die Inklusion $F \subseteq LF_X(f)$ folgt unmittelbar aus der Definition von $LF_X(f)$, denn nach 2.7b gilt ja $G_{Z_X^p} \leq C_G(H/K)$ für jeden X_p -Hauptfaktor H/K einer Gruppe $G \in F$ (existiert nämlich ein X -Hauptfaktor H/K von G , so ist $H/K \in X_p$ für alle $p \in \pi(H/K)$, also $G \notin E_{X_p}$, und wir haben $f(p) \neq \emptyset$ sowie $G/G_{Z_X^p} \in f(p)$) und $G_{E_E} = O_E(G) \leq K$ für jeden X' -Hauptfaktor H/K von G mit $G/K \in M$ und von Charakteristik E .

Ist weiter $G \in LF_X(f)$, so ist jeder X_p -Hauptfaktor von $G^{f(p)}$ zentral, da ein solcher (bis auf $G^{f(p)}$ -Isomorphie) als direkter Faktor eines X_p -Hauptfaktors von G unterhalb $G^{f(p)}$ auftritt. Das bedeutet $G^{f(p)} \leq G_{Z_X^p}$, also $G \in Z_X^p \circ f(p)$: Im Falle $f(p) = \emptyset$ gibt es ja keinen X_p -Hauptfaktor von $G \in LF_X(f)$.

Als Nächstes vermerken wir, daß $LF_X(f)$ ersichtlich ein Homomorph ist. Zum Nachweis von $LF_X(f) \subseteq E_{E, \circ f(E)}$ für $E \in X'$ können wir deshalb über eine Gruppe $G \in LF_X(f) \setminus E_{E, \circ f(E)}$ von kleinster Ordnung aussagen, daß G monolithisch mit minimalem E -Normalteiler $S(G)$ ist: $E_{E, \circ f(E)}$ ist nämlich eine Formation. Dann ist aber bereits $G \in f(E) \subseteq E_{E, \circ f(E)}$, ein Widerspruch.

Insgesamt haben wir jetzt auch noch $LF_X(f) \subseteq F$ eingesehen und sind fertig. \square

Es ist bequem, noch folgende Terminologie zur Verfügung zu haben:

Eine Formation F heißt *X-lokal (erklärbar)*, falls eine X -Formationenfunktion f mit $LF_X(f) = F$ existiert; selbstverständlich gibt es in diesem Fall i.allg. mehrere Möglichkeiten, ein solches f zu wählen — wir werden darauf später zurückkommen. Jedes solche f heißt eine *X-lokale Erklärung von F*.

Einen Hauptfaktor H/K einer Gruppe G nennen wir *f-zentral* bzgl. einer X -Formationenfunktion f , wenn gilt:

(i) $G/C_G(H/K) \in f(p)$ für alle $p \in \pi(H/K)$, falls die Charakteristik von H/K zu X gehört, bzw.

(ii) $G/L \in f(E)$ für alle $L \trianglelefteq G$ mit monolithischem G/L , die $K \leq L$ sowie $S(G/L) = HL/L$ erfüllen, falls H/K die Charakteristik $E \in X'$ hat.

Andernfalls wird H/K *f-exzentrisch* genannt. Schließlich nennen wir einen normalen Ausschnitt X/Y von G (d.h., $X, Y \trianglelefteq G$ mit $Y \leq X$) *f-hyperzentral*, falls jeder in X/Y enthaltene Hauptfaktor H/K von G (d.h., $Y \leq K$ und $H \leq X$) *f-zentral* ist.

Der Beweis des folgenden elementaren Lemmas bleibt dem Leser überlassen; s. Kap. II von [1] für eine ausführliche Untersuchung verwandter Ergebnisse (unter etwas anderen Voraussetzungen).

3.2 LEMMA. Seien $M, N, K \trianglelefteq G$, und sei $M \leq N$.

(a) Mit N (d.h. $N/1$) sind auch M und NK/MK *f-hyperzentral* in G .

(b) Mit M und N/M ist auch N *f-hyperzentral* in G (jedoch folgt die *f-Hyperzentralität* von N i.allg. noch nicht aus der von M und NK/MK unter der Zusatzvoraussetzung $N \cap K \leq M$).

(c) Sind $X, Y \trianglelefteq G$ mit $X, Y \leq N$ und $X \cap Y = 1$, so ist mit N/X und N/Y auch N *f-hyperzentral* in G , falls X oder Y zu E_X gehört.

Nach der inzwischen geleisteten Vorarbeit erhalten wir leicht unser erstes Hauptergebnis:

3.3 SATZ. Sei f eine X -Formationsfunktion und N/M ein normaler Ausschnitt der Gruppe G mit $M \leq \Phi_X(N)$.

Dann ist mit N/M auch N selbst *f-hyperzentral* in G .

Beweis. Vermöge einer Induktion nach $|G|+|M|$ dürfen wir, 2.3d,c und 3.2a,c anwendend, die Annahme machen, M sei minimal normal in G und stimme mit $S(G) \cap \Phi_X(N)$ überein. Bezeichnet p dann den Primteiler der Ordnung der (gemäß 2.3c nilpotenten) Gruppe M , so liegt dieser in $\chi(X)$; und außerdem darf mit ähnlichem Argument wie soeben, $\Phi_X(N) \leq \Phi_X^D(N)$, 2.3d, 2.5b und 3.2a,c auszunutzend, auch noch $O_{p,1}(N) = 1$ angenommen werden. Daher liefert 2.5b

$$M \leq \Phi_X(N) = \Phi_X^D(N),$$

wobei zusätzlich

$$F'(N \text{ mod } O_p(N)) = F'(N) \in E_{(X_O)_p}$$

ist. Da mit N/M auch $O_X(N/M) = O_X(N)/M$ (es war ja $M \in E_p \subseteq E_X$) f -hyperzentral in G ist, erkennen wir mittels der Definition von $\Phi_X^p(N)$ deshalb die Existenz eines $T \trianglelefteq G$ mit $M \trianglelefteq T \trianglelefteq N$ derart, daß

T/M f -hyperzentral in G ist, und

$$M \trianglelefteq \Phi_X(T) = \Phi_X^p(T), O_p(T) = 1 \text{ sowie } F'(T) \in E_{X_p}$$

gelten: Im Falle $F'(N) \in E_X$ wählen wir einfach $T = N$, andernfalls sei $T = O_X(N)$ — man bemerke, daß im letzten Fall $\Phi_X(N) = \Phi(O_X(N)) = \Phi_X(O_X(N))$ gemäß 2.3c ist.

1.2c entnehmen wir $C_G^h(F'(T)/\Phi(T))/C_G(T) \in E_p$, und dann ist erst recht die wegen 2.3c kleinere Gruppe

$$C_G^{h,X_p}(F'(T)/M)/C_G(T) \in E_p,$$

wobei $F'(T)/M \in E_{X_p}$ und $M \trianglelefteq \Phi_X(T)$ zu berücksichtigen sind. Die f -Hyperzentralität von T/M bewirkt nun

$$G/C_G^{h,X_p}(F'(T)/M) \in R_0 f(p) = f(p),$$

und wir erhalten insgesamt

$$G/C_G(T) \in E_p f(p).$$

Folglich ist $G/C_G(M) \in Q\{G/C_G(T)\} \subseteq Q(E_p f(p)) = E_p f(p)$, und da M minimaler p -Normalteiler von G ist, mithin $O_p(G/C_G(M)) = 1$ gilt ([12], VI.5.4.b), zeigt sich

$$G/C_G(M) \in f(p),$$

d.h., M ist f -hyperzentral in G ; es war ja der Primteiler p von $|M|$ aus $X(X)$. Zusammen mit der f -Hyperzentralität von N/M in G besagt dies nach 3.2b gerade: N ist f -hyperzentral in G . \square

Obiger Satz stammt im Spezialfall $X = \mathbb{P}$ (wenngleich nur mit dem nach 2.2c i.allg. echt kleineren $\Phi(O_{\mathbb{P}}(N))$ statt $\Phi_{\mathbb{P}}(N)$) von Baer (vgl. etwa [1]), im Spezialfall $X = X_O$ von Baer (vgl. ebenfalls etwa [1]) und Schmid [14]. Wir können ihn noch etwas verschärfen und erhalten dabei eine Aussage, die

im Universum $V = S$ (wobei naturgemäß $X = \mathbb{P}$ zu wählen ist) für $N = G$ schon bei Carter, Hawkes [5] zu finden ist und (ohne die Voraussetzung $N = G$) gleichfalls zuerst von Baer für $V = E$ mit $X = \mathbb{P}$ (vgl. wieder [1]) bewiesen wurde, zumindest in abgeschwächter Form.

Für diese Verschärfung haben wir allerdings *inklusive* X -Formationenfunktionen zu betrachten, d.h., solche, die der Bedingung $f(X) \in LF_X(f)$ für alle $X \in (X \cap \mathbb{P}) \cup X'$ genügen. Sie existieren für jede X -lokale Formation:

3.4 LEMMA. Sei $F = LF_X(f)$.

(a) Die durch $f_F(X) = F \cap f(X)$ für alle $X \in (X \cap \mathbb{P}) \cup X'$ definierte X -Formationenfunktion f_F ist eine *inklusive lokale Erklärung* von F .

(b) Ist f *inklusiv*, so ist auch die durch

$$f^*(X) = \begin{cases} E_p f(p), & \text{falls } X = p \in X \cap \mathbb{P} \\ E_{E'} f(E) \cap F, & \text{falls } X = E \in X' \end{cases}$$

definierte X -Formationenfunktion f^* eine *inklusive lokale Erklärung* von F , und sie hat die Eigenschaften

$$f^*(p) = E_p f^*(p) \quad (p \in X \cap \mathbb{P}), \quad f^*(E) = F \quad (E \in X');$$

eine *solche lokale Erklärung* wird *voll* genannt.

(c) Es gibt unter den *inklusive lokalen Erklärungen* von F eine *eindeutig bestimmte größte*, und diese zeichnet sich dadurch aus, daß sie auch *voll* ist.

Beweis. Der Beweis unterscheidet sich nur unwesentlich von dem in [7] in einem Spezialfall angegebenen. \square

3.5 KOROLLAR. Sei $N \neq G$, f eine *inklusive* X -Formationenfunktion, $F = LF_X(f)$, und sei $F'(N)/\Phi_X(N)$ f -hyperzentral in G .

(a) $G/C_G^h(F'(N)/\Phi_X(N)) \in F$.

(b) Enthält $C_G^h(F'(N)/\Phi_X(N))/C_N^h(F'(N)/\Phi_X(N))$ keinen f -exzentrischen Hauptfaktor von G mit einer Charakteristik aus $X' \cap \mathbb{P}$, der zu einem G -Hauptfaktor in $N/F'(N)$ G -isomorph ist, so ist N f -hyperzentral in G .

Beweis. (a) ist wegen $f(X) \in F$ für alle $X \in (X \text{ nTP}) \cup X'$ klar, da für jeden f -zentralen Hauptfaktor H/K von G mit Charakteristik X sicher $G/C_G(H/K) \in f(X)$ gilt, und zwar unabhängig davon, ob X zu X gehört oder nicht; für $X \in X$ ist hierbei $f(X)$ als der Durchschnitt aller $f(p)$ mit $p \in \pi(X)$ zu interpretieren.

(b) Wegen 1.1, 2.3c,d, 3.2b und 3.3 reicht es aus, die f -Hyperzentralität von $N/\phi_X(N)$ in G nachzuweisen, wobei zusätzlich $\phi_X(N) = 1$ angenommen werden darf. Mit anderen Worten, wir dürfen $F'(N)$ als f -hyperzentral in G voraussetzen.

Natürlich gilt

$$\begin{aligned} N \cap C_G^h(F'(N)) &= C_N^h(F'(N)) \leq C_N^h(F'(N)/\phi(N)) \\ &= C_N(F'(N)/\phi(N)) = C_N(F'(N/\phi(N))) \\ &\leq F'(N \text{ mod } \phi(N)) = F'(N), \end{aligned}$$

wie die Ergebnisse von Abschnitt 1 zeigen. Enthält N einen f -exzentrischen Hauptfaktor von G , etwa H/K , so darf nach Voraussetzung $F'(N) \leq K$ angenommen werden. Wegen (a) folgt aus

$$N/N \cap C_G^h(F'(N)) \cong NC_G^h(F'(N))/C_G^h(F'(N)) \leq G/C_G^h(F'(N)) \in F$$

zuerst einmal, daß die Charakteristik von H/K zu X' gehört, und Betrachtung einer monolithischen Faktorgruppe $G/L \notin F$ mit $K \leq L \not\cong H$ liefert danach leicht, daß ein zu H/K G -isomorpher Hauptfaktor X/Y in $C_G^h(F'(N))/C_N^h(F'(N))$ mit $Y \leq L \not\cong X$ existiert; dabei ist notwendig $H/K \cong X/Y$ abelsch, da andernfalls $L = C_G(H/K) \cong C_G^h(F'(N))$ wäre: Man beachte

$$[C_G^h(F'(N)), H] \leq [C_G^h(F'(N)), N] \leq C_G^h(F'(N)) \cap N \leq F'(N) \leq K. \square$$

3.6 KOROLLAR. Ist $F = LF_X(f) = E_{\Phi}^*F$ mit inklusiver X -Formationsfunktion f , und ist $N \leq G$, so folgt aus der f -Hyperzentralität von $F'(N)/\phi_X(N)$ in G bereits $G/C_G(N) \in F$.

Beweis. Wegen unserer Zusatzvoraussetzung $F = E_{\Phi}^*F$ ist (neben der allgemeinen Voraussetzung von 3.5) die zusätzliche Bedingung in 3.5b erfüllt: Eine Gruppe X liegt nämlich jetzt schon dann in F , wenn nur $(Y/Z)*X \in F$ für alle Hauptfak-

toren Y/Z von X gilt. Also liefert 3.5, daß N f -hyperzentral in G ist. Daraus folgt aber allgemein $G/C_G(N) \in F$, wie eine einfache Induktion zeigt. \square

Wir erwähnen noch, daß eine im Hinblick auf klassische Sätze (u.a. von P.Hall [11], Baer [2] – vgl. auch Schmid [14]) interessante Verallgemeinerung der hier bewiesenen Ergebnisse möglich ist und auch mit den oben benutzten Methoden durchgeführt werden kann: Man betrachte dazu eine X -lokale Formation $F = E_{\Phi}^*F$ und definiere für eine durch Automorphismen auf einer Gruppe G (nicht notwendig treu) operierende Gruppe A in naheliegender Weise den Begriff f -hyperzentraler Operation von A auf G . Man erhält auf diese Weise sehr einfach die Hauptergebnisse von Schmid [14].

Ferner weisen wir darauf hin, daß (die Schlussbemerkung im Beweis von) 3.6 sofort eine Verallgemeinerung eines Satzes von Huppert [13] liefert:

*Für $F = LF_X(f) = E_{\Phi}^*F$ mit inklusivem f ist $[G^F, Z_F(G)] = 1$, wobei $Z_F(G)$ den nach 3.2 existierenden eindeutig bestimmten größten f -hyperzentralen Normalteiler N von G bezeichnet; dieser ist nach 3.7b unten von der speziellen Wahl des (inklusive) f unabhängig.*

Auf Zerlegungssätze und Zerfällungskriterien, wie sie in Kap. VII von [1] aus Resultaten obiger Art abgeleitet wurden, wollen wir an dieser Stelle nicht mehr eingehen: Es dürfte dem Leser jetzt nicht mehr schwer fallen, durch Kombination unserer letzten Ergebnisse mit den dort benutzten Methoden solche Resultate zu formulieren und beweisen.

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnitts, einem allgemeinen Gaschütz-Lubeseder-Baer-Satz, dessen einfachere Hälfte ein Spezialfall von 3.3 und 3.5a ist. Eine Vorbemerkung muß noch vorausgeschickt werden, deren Beweis evident ist:

3.7 LEMMA. Für $F = LF_X(f)$ ist $G \in F$ genau dann, wenn G f -hyperzentral in G ist.

(b) Sei $F = LF_X(f) = LF_X(g)$ mit inklusiven f und g . Dann stimmen die Begriffe f -hyperzentral und g -hyperzentral überein.

(c) Nennen wir für eine beliebige Formation F einen Hauptfaktor H/K von G F -zentral, falls $G/L \in F$ für jedes $L \trianglelefteq G$ mit monolithischem G/L gilt, für das $K \trianglelefteq L$ und $S(G/L) = HL$ ist, so sind (wegen 1.1) folgende Aussagen gleichwertig

(i) $G \in F$.

(ii) Alle Hauptfaktoren von G sind F -zentral.

(iii) Alle Hauptfaktoren H/K mit $H \trianglelefteq F'(G)$ sind F -zentral

(d.h., $F'(G)$ ist F -hyperzentral in G).

3.8 SATZ. Sei F eine Formation endlicher Gruppen und X eine \mathbb{P} -abgeschlossene Klasse einfacher Gruppen. Dann sind die folgenden fünf Aussagen äquivalent:

(i) F ist X -gesättigt.

(ii) F ist $(X \cap \mathbb{P})$ -gesättigt; und zu jedem $G \in F \cap \mathbb{P}_{II}$ mit $S(G) \in E_X$ und jedem $p \in \pi(S(G))$ existiert eine Gruppe $H \in F$ mit p -elementarabelschem $\Phi(H)$ derart, daß $H/\Phi(H) \cong G$ ist und $\Phi(H)$ einen für $H/\Phi(H)$ treuen Hauptfaktor von H enthält.

(iii) Jede Gruppe G mit F -hyperzentralem $F'(G)/\Phi_X(G)$ liegt in F .

(iv) Jede Gruppe G mit F -hyperzentralem $F'(G)/\Phi_p(G)$ für eine Primzahl $p \in X(X)$ liegt in F ; und zu jedem $G \in F \cap \mathbb{P}_{II}$ mit $S(G) \in E_X$ und jedem $p \in \pi(S(G))$ existiert eine Gruppe $H \in F$ mit p -elementarabelschem $\Phi(H)$ derart, daß $H/\Phi(H) \cong G$ ist und $\Phi(H)$ einen für $H/\Phi(H)$ treuen Hauptfaktor von H enthält.

(v) F ist X -lokal erklärbar.

Ist eine dieser fünf Bedingungen erfüllt, so wird die eindeutig bestimmte minimale X -lokale Erklärung f_0 von F gegeben durch

$$f_0(X) = \begin{cases} QR_0 \{G/C_G(H/K) \mid G \in F, H/K \text{ } X_p\text{-Hauptfaktor von } G\}, & \text{falls } X = p \in X \\ QR_0 \{G \in M \cap QF \mid S(G) \in E_F\}, & \text{falls } X = E \in X' \end{cases}$$

und die eindeutig bestimmte volle und inklusive X -lokale Erklärung f^0 von F durch

$$f^0(X) = \begin{cases} E_p f_0(p), & \text{falls } X = p \in X \\ QR_0 F, & \text{falls } X \in X'. \end{cases}$$

(In den letzten Gleichungen haben wir $QR_0 F$ statt F im Hinblick auf 3.9 unten geschrieben.)

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Für $Y \cong X \cong X_0$ entnimmt man der Definition der verallgemeinerten Frattinigruppe $\Phi_Y(G) \leq \Phi_X(G)$ für alle $G \in E$. Daher impliziert X -Sättigung sicher Y -Sättigung, was den ersten Teil von (ii) klärt, während der zweite mit 2.1 folgt: Setzt man nämlich H als die durch 2.1a gelieferte maximale Frattinierweiterung von $G \in P_{II}$ mit p -elementarabelschem Kern $A_p(G)$ ($p \in \pi(S(G))$) fest, so ist ja $O_p(H) = 1$ und $F'(H)/\Phi(H) \cong S(G)$; ferner ist 2.1b,c anwendbar, wenn wir $G \in M$ berücksichtigen.

(iii) \Rightarrow (iv): Dies ist jetzt trivial.

(i) \Rightarrow (iii), (ii) \Rightarrow (iv): Diese Implikationen ergeben sich mittels 3.7c.

(iv) \Rightarrow (v): Wir werden im nachstehenden Satz gesondert zeigen, daß für eine beliebige Gruppenklasse F die kleinste X -gesättigte Formation $H (= \{QR_0, E_{\phi_X}\}F)$ durch die oben angegebene X -Formationenfunktion f_0 X -lokal definiert wird; damit wird diese Implikation dann klar sein, wenn man zusätzlich berücksichtigt, daß wir den Abschlußoperator E_{ϕ_X} zum Beweis jenes Satzes nicht voll einsetzen, sondern lediglich 'X-frattinische Erweiterungen' der unter (iv) beschriebenen Art bilden.

(v) \Rightarrow (i) Das steht in 3.3, und zwar als Spezialfall $N = G$; man beachte 3.7a.

Die Behauptungen über f_0 und f^0 sind schließlich im Hinblick auf 3.9 und 3.4b,c klar, denn f_0 ist trivialerweise inklusiv. \square

Cossey und Oates-Macdonald haben in [6] den von Q , R_0 und E_ϕ erzeugten Abschlußoperator $\{Q, R_0, E_\phi\}$ im Universum S der endlichen auflösbaren Gruppen berechnet als

$$\{Q, R_0, E_\phi\} = (E_\phi QR_0)^2 \text{ (in } S);$$

dabei ist bekanntlich $\{Q, R_0\} = QR_0$ - vgl. etwa [4]. Unser folgendes Ergebnis zeigt u.a., wie diese Gleichung einerseits zu verbessern, andererseits für das Universum $V = E$ zu modifizieren ist:

$$\{Q, R_0, E_\phi\} = \begin{cases} (QR_0 E_\phi)^2 & \text{in } E \\ QR_0 E_\phi QR_0 & \text{in } S \end{cases}.$$

Wegen des schlechteren Vererblichkeitsverhaltens von ϕ_X , und vor allem, da frattinische Erweiterungen von Gruppen aus E_X nicht notwendig X -frattinische Erweiterungen sind, ist unser allgemeines Ergebnis etwas komplizierter, jedoch erhalten wir die genannten Resultate durch eine Zusatzüberlegung ebenfalls.

Zur bequemen Formulierung von 3.9 legen wir noch einige Bezeichnungen fest:

Sind H und $K = N_0 K$ Gruppenklassen, so sei $H/K = \{H/H_K \mid H \in H\}$.

Ist H irgendeine Gruppenklasse und $p \in P$, so sei

$$\epsilon_{\phi_p} H = \{G \in E \mid G/N \in H \text{ für ein } N \trianglelefteq G \text{ mit } N \leq \phi_p(O_p(G))\},$$

$\delta_{\phi_X}^p H = H \vee \{G \in E \mid G = H_{\phi,p} \text{ für ein } H \in H \cap P_{II} \text{ mit } S(H) \in E_X\}$, wobei wir mit $H_{\phi,p}$ die durch 2.1 gelieferte maximale frattinische Erweiterung von H mit p -elementarabelschem Kern $A_p(H)$ bezeichnet haben,

$$\sigma_W H = \{H \leq G \in H \mid G = HF(G)\};$$

dabei sei daran erinnert, daß nach [4] $\sigma_W F = F$ für Formationen F gilt.

Mit $E_{\phi_X}^0 = \{\epsilon_{\phi_p} \mid p \in X(X)\}$ bzw. $E_{\phi_X}^1 = \{\delta_{\phi_X}^p \mid p \in X(X)\}$ bezeichnen wir schließlich die durch die ϵ_{ϕ_p} bzw. die $\delta_{\phi_X}^p$ für alle $p \in X(X)$ erzeugten Abschlußoperatoren.

3.9 SATZ. Sei F irgendeine Gruppenklasse, und werde f_0 zu F und X wie in 3.8 definiert.

$$(a) E_p f_0(p) = Q \sigma_W \epsilon_{\phi_p} QR_0 \delta_{\phi_X}^p Q([QR_0 F]/Y_X^p).$$

$$(b) Q(LF_X(f_0)/Y_X) = QR_0 E_{\phi_X}^0 QR_0 E_{\phi_X}^1 Q([QR_0 F]/Y_X).$$

$$(c) LF_X(f_0) = (E_{\phi_X}^0 \sigma_W E_{\phi_X}^0)(QR_0 E_{\phi_X}^0 QR_0)(E_{\phi_X}^1 QR_0)F = (E_{\phi_X} QR_0)^4 F.$$

Beweis. (a) Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

(1) Zu jeder Gruppe $F \in F/Y_X^p$ und jedem nicht-abelschen X_p -Hauptfaktor A/B

von F wählen wir unter Rückgriff auf 2.1 — bzw. auf Bedingung (iv) aus 3.8, soweit wir mit dem Beweis der dort noch fehlenden Implikation "(iv) \Rightarrow (v)" beschäftigt sind — eine Gruppe $F_0 = F_0(F, A/B)$ mit folgenden Eigenschaften aus:

$F_0/\Phi(F_0) \cong F/C_F(A/B)$ — dies eine Gruppe aus $QF \cap P_{II}$ mit Sockel aus E_{X_p} ,
 $\Phi(F_0)$ ist eine elementarabelsche p -Gruppe und enthält einen Hauptfaktor A_0/B_0 von F_0 mit $C_{F_0}(A_0/B_0) = \Phi(F_0)$.

Ferner setzen wir $F_p^0 = (F/Y_X^p) \cup F_p^0$, wobei F_p^0 die Klasse all der gerade gebildeten Gruppen $F_0(F, A/B)$ darstellt, sowie $F_p^* = QR_0 F_p^0$. Dann ist offensichtlich $F_p^* \cong QR_0 \delta_{\Phi_X}^p Q(F/Y_X^p)$, und zu jeder Gruppe $F_1 \in F_p$ und jedem X_p -Hauptfaktor A_1/B_1 von F_1 liegt dann das semidirekte Produkt von $F_1/C_{F_1}(A_1/B_1)$ mit einem geeigneten irreduziblen, treuen Modul $V = V(F_1, A_1/B_1)$ über $GF(p)$ in F_p^* :

Nach einem elementaren Lemma von Barnes und Keegel (s. [12], VI.7.21) liegt für eine beliebige Gruppe F_1^* und für jeden ihrer abelschen Hauptfaktoren A_1^*/B_1^* das semidirekte Produkt $(F_1^*/C_{F_1^*}(A_1^*/B_1^*))(A_1^*/B_1^*)$ in der von F_1^* erzeugten Formation $QR_0\{F_1^*\}$. Damit folgt die Behauptung sofort aus der Konstruktion von F_p und F_p^* : Ist nämlich A_1/B_1 abelsch, so kann man $F_1^* = F_1$ betrachten, im anderen Fall hingegen leistet $F_1^* = F_0(F_1, A_1/B_1)$ den gewünschten Dienst.

(2) Sei $X = X_0$ eine Gruppe mit Normalteilern Y_1, \dots, Y_n und irreduziblen $GF(p)[X]$ -Moduln V_1, \dots, V_n derart, daß $\bigcap_{i=1}^n Y_i = 1$ und $C_X(V_i) = Y_i$ ist; es werde $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ und $T_0 = 1$ gesetzt. Sei ferner $m \in \mathbb{N}$. Dann existieren für alle $k \in \mathbb{N}$ Gruppen X_k, T_k und $GF(p)[X_{k-1}]$ -Moduln W_k mit folgenden Eigenschaften:

(α) $X_k = X_{k-1}W_k$ ist ein semidirektes Produkt, gebildet zur Moduloperation von X_{k-1} auf W_k ;

(β) in W_k existiert ein Element w_k mit $C_{X_{k-1}}(w_k) = 1$ — insbesondere ist $C_{X_{k-1}}(W_k) = 1$;

(γ) $T_k = T_{k-1}W_k = O_p(X_k) = F'(X_k)$;

(δ) $W_k/\text{Rad}_{T_{k-1}}(W_k) \cong \bigoplus V$, wobei V, W_k und $\text{Rad}_{T_{k-1}}(W_k)$ als Moduln für X_{k-1}

aufzufassen sind, und zwar mit $W_{k-1} \trianglelefteq T_{k-1} \trianglelefteq C_{X_{k-1}}(V)$, und für $k = 1$ ist sogar $W_1 \cong \bigoplus V$; und

(ε) $(W_k)_{X_{k-2}}$ enthält für $k \geq 2$ einen zu $\bigoplus_{\mathbb{F}} \text{GF}(p)[X_{k-2}]$ isomorphen X_{k-2} -Teilmodul:

Wir konstruieren die geforderten Gruppen rekursiv, ausgehend von den gegebenen Gruppen X_0, T_0 und dem Modul V , und beginnen mit den Festsetzungen

$$W_1 = \bigoplus_{d_1} V \text{ mit } d_1 = |V|, X_1 = X_0 W_1, T_1 = W_1 = T_0 W_1.$$

Sind X_k, T_k, W_k für ein $k \in \mathbb{N}$ schon mit den verlangten Eigenschaften gegeben, so bilden wir

$$W_{k+1} = \left(\bigoplus_{d_{k+1}} (W_k)_{X_{k-1}} \right)^{X_k} \text{ (den von } X_{k-1} \text{ zu } X_k \text{ hochinduzierten Modul) mit } d_{k+1} = \text{Max}\{m, |((W_k)_{X_{k-1}})^{X_k}|\},$$

$$X_{k+1} = X_k W_{k+1} \text{ (das semidirekte Produkt), sowie } T_{k+1} = T_k W_{k+1} \trianglelefteq X_{k+1}.$$

Die Behauptung (α) ist damit per Konstruktionsvorschrift automatisch erfüllt.

Um (β) einzusehen, zeigen wir allgemein für eine Gruppe G und einen treuen G -Modul W , daß in $\bigoplus_{|W|} W$ ein Element w mit $C_G(w) = 1$ existiert; dann folgt (β) vermöge der Konstruktion der W_k und nach Wahl von d_k . Ein solches w können wir, eine Abzählung $W = \{w_1, \dots, w_1\}$ von W benutzend, wie folgt angeben:

$$w = (w_1, \dots, w_1);$$

es ist dann nämlich

$$C_G(w) = \bigcap_{j=1}^1 C_G(0, \dots, 0, w_j, 0, \dots, 0) = \bigcap_{j=1}^1 C_G(w_j) = C_G(W) = 1,$$

denn die Operation von X auf $W \oplus \dots \oplus W$ ist ja mit den Projektionen auf die j -ten Komponenten vertauschbar.

Die erste Gleichung unter (γ) ist definitionsgemäß erfüllt, während $T_k = O_p(X_k) = F^1(X_k)$ induktiv aus der Konstruktion von W_k und T_k folgt, wenn man $T_1 = W_1 = O_p(X_1) = F^1(X_1)$ wegen $X_1 = X(\bigoplus V)$ und $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ mit $C_X(V) = \bigcap_{i=1}^n C_X(V_i) = \bigcap_{i=1}^n Y_i = 1$ und das Zerfallen von $X_k = X_{k-1} T_k$ über T_k berücksichtigt.

Zum Nachweis von (δ) zeigen wir zuerst allgemein für eine Gruppe G und einen

GF(p)[G]-Modul W, daß für jeden irreduziblen GF(p)[G]-Modul U für das semi-direkte Produkt $H = GW$ und den induzierten Modul $(U_G)^H$ die H-Isomorphie

$$(U_G)^H / \text{Rad}_H((U_G)^H) \cong U \text{ sowie } \text{Rad}_H((U_G)^H) = \text{Rad}_W(((U_G)^H)_W)$$

gilt, wobei U als (notwendig irreduzibler) GF(p)[H]-Modul mit $C_H(U) = C_G(U)W$ vermöge der gegebenen Moduloperation von G auf U anzusehen ist. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß $\{1\}$ ein Doppelnebenklassenvertretersystem von (G,W) in $H = GW$ ist, weshalb der Satz von Mackey ([12], V.16.9a)

$$((U_G)^H)_W \cong ((U \otimes 1)_{G \cap W})^W = (U_1)^W \cong \bigoplus_e (1_1^p)^W = \bigoplus_e \text{GF}(p)[W]$$

$$\text{mit } e = \dim_{\text{GF}(p)} U$$

liefert. Daraus schließen wir

$$((U_G)^H)_W / \text{Rad}_W(((U_G)^H)_W) \cong \bigoplus_e 1_W^p,$$

denn W war ja unter unserer jetzigen Voraussetzung eine p-Gruppe (s. [12], V. 5.16b). Wir haben noch die Feststellung zu treffen, daß $\text{Rad}_W(((U_G)^H)_W)$ überhaupt ein H-Modul ist: Es war ja $W \trianglelefteq H$. Wegen der verallgemeinerten Frobenius-
 reziprozität ([12], V.16.7) tritt nun ein irreduzibler H-Modul M genau dann als Faktormodul von $(U_G)^H$ auf für den irreduziblen G-Modul U, wenn U als Teilmodul von M_G vorkommt. Da im Falle $H = GW$ sicher $W \leq O_p(H)$ nach [12], V.5.17, trivial auf dem irreduziblen H-Modul M operiert, ist M_G aber bereits irreduzibel und stimmt daher notwendig mit U überein. Wir sehen so, daß nur der H-Modul U mit $W \leq C_H(U)$ als irreduzibler Faktormodul von $(U_G)^H$ auftreten kann, und wegen $\text{Rad}_W(((U_G)^H)_W) \leq \text{Rad}_H((U_G)^H)$ — man beachte wieder $W \trianglelefteq H$ — und der oben gefundenen Isomorphie ist die Vielfachheit von U als Faktormodul von $(U_G)^H / \text{Rad}_W(((U_G)^H)_W)$ zwangsläufig 1; insbesondere folgt sogar $\text{Rad}_H((U_G)^H) = \text{Rad}_W(((U_G)^H)_W)$. Unsere Zwischenbehauptung ist somit bewiesen. Aus dieser und den Beziehungen $(\text{Rad}_G(A_G))^H \leq \text{Rad}_H((A_G)^H)$ (was gleich noch bewiesen wird) und $A^H/B^H \cong (A/B)^H$ für irgendwelche G-Moduln A und B mit $B \leq A$ (was wohlbekannt ist) folgt nunmehr aus der Konstruktion der W_k die Behauptung unter (δ). Wir haben für diese also nur noch zu verifizieren: Ist $H = GW$ zerfallend mit p-Normalteiler W, so ist

$$(\text{Rad}_G(A_G))^H \subseteq \text{Rad}_H((A_G)^H)$$

für jeden G-Modul A. Dazu setzen wir $R = \text{Rad}_G(A)$ und bemerken wegen $H = GW$ mit $G \cap W = 1$, $W \trianglelefteq H$ und $W \leq O_p(H)$

$$(A_G)^H = \bigoplus_{w \in W} (A \otimes w) \text{ (als GF(p)-Vektorraum),}$$

wobei $w' \in W$ auf diesem Modul vermöge Verschiebung der Komponente $A \otimes w$ nach $A \otimes (ww')$ operiert; m.a.W., als W-Modul ist dies gerade die direkte Summe von $\dim_{GF(p)} A$ Kopien von $GF(p)[W]$, und entsprechendes gilt natürlich mit R anstelle von A. Nun ist aber $\text{Rad}_W(GF(p)[W])$ 1-codimensional in $GF(p)[W]$, und die direkte Summe der $\dim_{GF(p)} R$ Moduln $\text{Rad}_W(GF(p)[W])$ in R^H liegt, wie ähnlich oben schon eingesehen wurde, gewiß in $\text{Rad}_H((R_G)^H) \subseteq \text{Rad}_H((A_G)^H)$, während der Faktormodul von $(R_G)^H$ nach dieser direkten Summe trivial für W ist und zu dem G-Modul $R \otimes 1$ G-isomorph ist; mehr noch, diese direkte Summe wird durch $R \otimes 1$ in $(R_G)^H$ komplementiert (als GF(p)-Vektorraum, aber dann auch als Modul). Aus dieser Überlegung leitet man leicht ab, daß mit $f = \dim_{GF(p)} R$

$(R_G)^H / \bigoplus_f \text{Rad}_W(GF(p)[W]) \subseteq \text{Rad}_H((A_G)^H / \bigoplus_f \text{Rad}_W(GF(p)[W]))$ (bis auf Isomorphie) gilt, wenn man bedenkt, daß der erste Modul ein H-Modul ist, der im G-Radikal eines zu A_G isomorphen Teilmoduls von $(A_G)^H / \bigoplus_g \text{Rad}_W(GF(p)[W])$, $g = \dim_{GF(p)} A$, liegt; und obige Inklusion ist jetzt klar.

Wir kommen schließlich zum Nachweis von (ε), der wieder durch Anwendung des Mackeyschen Satzes erfolgt. Wir brauchen lediglich in $((W_{k-1})_{X_{k-2}}^{X_{k-1}})_{X_{k-2}}$ einen zu $GF(p)[X_{k-2}]$ isomorphen X_{k-2} -Teilmodul zu finden, wie aus der Festsetzung von d_k hervorgeht. Das durch (β) garantierte $w_{k-1} \in W_{k-1}$ in ein Doppelnebenklassenvertretersystem von (X_{k-2}, X_{k-2}) in X_{k-1} einbeziehend erhalten wir aus Mackeys Satz einen direkten Summanden von

$$((W_{k-1})_{X_{k-2}}^{X_{k-1}})_{X_{k-2}} \text{ der Gestalt } ((W_{k-1} \otimes_{W_{k-1}} w_{k-1})_{X_{k-2}}^{X_{k-1}})_{X_{k-2}};$$

dabei ist

$$X_{k-2}^{w_{k-1}} \cap X_{k-2} = C_{X_{k-2}}(w_{k-1}) = 1,$$

wobei die erste Gleichung aus $X_{k-1} = X_{k-2}W_{k-1}$ (zerfallend) und die letzte aus (β) folgt. Unser direkter Summand stellt sich also ähnlich wie oben als eine direkte Summe von $\dim_{GF(p)} W_{k-1}$ Kopien von $GF(p)[X_{k-2}]$ heraus. Mithin ist der Beweis von (2) vollständig.

(3) Für die unter (2) konstruierten Gruppen X_k ($k \geq 1$) gilt

$$X_k = XF'(X_k), X \cap F'(X_k) = 1, F'(X_k) = O_p(X_k),$$

$$F'(X_k)/\phi(F'(X_k)) \cong_X \bigoplus_e V \text{ für ein } e \in \mathbb{N}:$$

Die ersten drei dieser Gleichungen folgen sofort aus den Behauptungen (α) und (γ) unter (2), die letzte ergibt sich aus (δ) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\text{Rad}_H(M) \leq \phi(HM)$ im semidirekten Produkt einer Gruppe H mit einem Modul M über $GF(p)$ gilt und für $L \leq H$ stets $\phi(L) \leq \phi(H)$ ist.

(4) Ist G eine Gruppe mit p -Normalteiler N derart, daß erstens $G/N \cong XV$ (mit den Bezeichnungen aus (2)) gilt, und zweitens eine G -Hauptreihe $1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_t$ mit $|N_i/N_{i-1}| \leq p^m$ für $i = 1, \dots, t$ existiert, so gibt es einen Monomorphismus $\phi: G \rightarrow X_{2t+1}$ mit $X_{2t+1} = G^{\phi} O_p(X_{2t+1})$:

Mittels einer trivialen Induktion leitet man aus dem Krasner-Kaloujnineschen Einbettungssatz [12], I.15.9, ab, daß ein Monomorphismus ψ von G in das iterierte reguläre Kranzprodukt

$$K = (N_1/N_0) \wr [(N_2/N_1) \wr [\dots \wr [(N_t/N_{t-1}) \wr (G/N_t)]] \dots]$$

existiert, wobei G^ψ in K die "iterierte Basisgruppe" (also das Produkt der Basisgruppen der einzelnen Kranzprodukte) supplementiert. Es reicht daher aus zu klären, daß K (bis auf Isomorphie) als Untergruppe von X_{2t+1} auftaucht, und daß es dort außerdem noch $O_p(X_{2t+1})$ supplementiert; man beachte hier $O_p(X_{2t+1}) \cap K = O_p(K)$ sowie $O_p(K) \cap G^\psi = O_p(G^\psi)$. Wegen unserer Bedingung an m ist es leicht zu sehen, daß K in entsprechender Weise in die Gruppe

$$K^* = Z_p^m \wr (Z_p^m \wr \dots \wr (Z_p^m \wr (G/N)) \dots) \text{ mit } Z_p^m = Z_p \times \dots \times Z_p \\ \cong Z_p^m \wr (Z_p^m \wr \dots \wr (Z_p^m \wr XV) \dots) \text{ mit } t \text{ Faktoren } Z_p^m$$

eingebettet werden kann. Die letztere Gruppe ist aber gerade (bis auf Isomor-

phie) das iterierte semidirekte Produkt

$$(XV) \left(\bigoplus_m GF(p)[XV] \right) \left(\bigoplus_m GF(p) \left[(XV) \left(\bigoplus_m GF(p)[XV] \right) \right] \right) \dots \text{ mit } t \text{ Faktoren } GF(p)[\dots]$$

und diese Gruppe können wir in der gewünschten Weise als Untergruppe von

X_{2t+1} finden, wie aus den Bedingungen $(\alpha + \epsilon)$ zu ersehen ist: Es ist nämlich $XV \leq X_1$, in $(W_3)_{X_1}$ kommt $\bigoplus_m GF(p)[X_1]$ als X_1 -Teilmodul vor, und damit stellt sich erst recht auch $\bigoplus_m GF(p)[XV]$ als Teilmodul von $(W_3)_{XV}$ heraus, da ja $GF(p)[A] \leq (GF(p)[B])_A$ für $A \leq B$ stets richtig ist; und eine naheliegende Induktion führt schließlich zu dem gewünschten Ergebnis, wenn man das Zerfallen der X_k über den W_k in die Überlegung miteinbezieht.

Wir fassen nun das für unsere weiteren Überlegungen wesentliche der Zwischenergebnisse (2-4) zusammen:

(5) Ist G eine Gruppe mit p -Normalteiler N derart, daß $G/N \cong XV$ mit einer Gruppe X und einem $GF(p)[X]$ -Modul V mit den Eigenschaften

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n \text{ mit irreduziblen } V_i \text{ und } \bigcap_{i=1}^n C_X(V_i) = 1$$

ist, so liegt G in $\sigma_{w, \epsilon, \phi} R_p \{XV\}$.

Nun sind wir in der Lage zu zeigen:

$$(6) E_p f_o(p) \leq Q_{w, \epsilon, \phi} F_p^\# \text{ mit } F_p^\# = Q_{R_o} F'_p \text{ für } F'_p = ([QR_o F]/Y_X^p) \cup F_o^p$$

Sei $H \in E_p f_o(p)$ und $K = H^{f_o(p)}$. Aufgrund der Definition von $f_o(p)$ ist dann H/K bis auf Isomorphie Faktorgruppe X/Y einer Gruppe X mit Normalteilern Y_1, \dots, Y_n derart, daß $\bigcap_{i=1}^n Y_i = 1$ und $X/Y_i \cong G_i/C_{G_i}(H_i/K_i)$ für geeignete Gruppen $G_i \in F$ und geeignete X_p -Hauptfaktoren H_i/K_i von G_i gilt. (1) liefert uns irreduzible X -Moduln V_i mit $C_X(V_i) = Y_i$ und $(X/Y_i)V_i \in F^\#$. Bilden wir nun das direkte Produkt

$$G_o = H \rtimes X \text{ mit vereinigter Faktorgruppe } H/K \cong X/Y$$

und anschließend das semidirekte Produkt

$$G = G_o V$$

mit der gegebenen Operation der Faktorgruppe $X \cong G_o/G_o$ auf V mit $G_o \leq C_{G_o}(V)$ für $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, so ist wegen $K = H^{f_o(p)} \in E_p$ (5) auf G anwendbar und

zeigt

$$G \in \sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} R_0} \{XV\},$$

also weiter

$$\begin{aligned} H \in Q\{G\} &\subseteq Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} R_0} \{XV\} \subseteq Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} R_0^2} \{(X/Y_i) v_i \mid i = 1, \dots, n\} \\ &\subseteq Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} R_0} F_p^\# = Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} F_p^\#} = Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} QR_0} F_p'; \text{ vgl. (1)}. \end{aligned}$$

Aus (1) und (6) erhalten wir

$$(7) E_p f_0(p) \subseteq Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} QR_0} \delta_{\phi_X}^p Q([QR_0 F]/Y_X^p):$$

Nach (1) gilt ja $F_p' = ([QR_0 F]/Y_X^p) \cup F_0^p \subseteq ([QR_0 F]/Y_X^p) \cup \delta_{\phi_X}^p Q(F/Y_X^p) \subseteq \delta_{\phi_X}^p Q([QR_0 F]/Y_X^p)$; man beachte die Definitionen von Y_X^p und G/Y_X^p .

$$(8) Q\sigma_{w \varepsilon_{\phi_p} QR_0} \delta_{\phi_X}^p Q([QR_0 F]/Y_X^p) \subseteq E_p f_0(p):$$

Sei G irgendeine Gruppe aus $QR_0 F$. Dann haben wir $G_{Z_X^p}$

$= O_p(G \text{ mod } G_{Y_X^p})$, wie man an 2.7c abliest. Ferner gilt nach 2.7b $C_G^{h, X, p}(G) = G_{Z_X^p}$, wobei nach Definition von $f_0(p)$ natürlich $G/C_G^{h, X, p}(G) \in f_0(p)$ ist. Insgesamt ergibt sich $G/G_{Y_X^p} \in E_p f_0(p)$. Dies zeigt

$$[QR_0 F]/Y_X^p \in E_p f_0(p).$$

Da $E_p f_0(p)$ eine aus trivialen Gründen ε_{ϕ_p} - und $\delta_{\phi_X}^p$ -abgeschlossene Formation ist, folgt hieraus die Behauptung.

Die Aussage unter (a) erhält man durch Kombination von (7) und (8).

(b) Wir vermerken zuerst, daß $Q(LF_X(f_0)/Y_X)$ R_0 -abgeschlossen und somit eine Formation ist: Es ist nämlich, da QR_0 einen Abschlußoperator bildet, $R_0 Q(LF_X(f_0)/Y_X) \subseteq QR_0(LF_X(f_0)/Y_X)$, und wir haben $R_0(LF_X(f_0)/Y_X) \subseteq LF_X(f_0)/Y_X$ wegen $R_0(LF_X(f_0)) = LF_X(f_0)$ und $QY_X = Y_X$, wie man sich unter Verwendung des direkten Produkts zweier Gruppen mit vereinigter Faktorgruppe mittels eines Standardargumentes leicht klar macht. Da überdies $LF_X(f_0) = QR_0(LF_X(f_0))$ wegen des bereits bewiesenen Teils von 3.8 sicherlich ε_{ϕ_p} - und $\delta_{\phi_X}^p$ -abgeschlossen für alle $p \in X(X)$ ist, zeigt eine ähnliche Argumentation, daß sich diese Abschlußeigenschaften auf $Q(LF_X(f_0)/Y_X)$ übertragen. Eine der beiden nachzuweisenden Inklusionen folgt daher sofort aus $[QR_0 F]/Y_X \subseteq LF_X(f_0)/Y_X$, wozu $QR_0 F$

$\in LF_X(f_0)$ genügt. Um diese letzte Inklusion zu zeigen, reicht der Nachweis von $QF \cap M \in LF_X(f_0)$ aus, da letztere Klasse eine Formation ist. Die Beziehung $QF \cap M \in LF_X(f_0)$ jedoch ist eine triviale Konsequenz der Definitionen von f_0 und $LF_X(f_0)$. Es folgt also:

$$QR_0 E_{\Phi_X}^0 QR_0 E'_{\Phi_X} Q([QR_0 F]/Y_X) \in Q(LF_X(f_0)/Y_X).$$

Umgekehrt ist wegen $Y_X = \bigcap_{p \in X(X)} Y_X^p$ offensichtlich

$$Q(LF_X(f_0)/Y_X) \in QR_0 \left(\bigcup_{p \in X(X)} [LF_X(f_0)/Y_X^p] \right),$$

womit nur

$$LF_X(f_0)/Y_X^p \in QR_0 E_{\Phi_X}^0 QR_0 E'_{\Phi_X} Q([QR_0 F]/Y_X) \text{ für alle } p \in X(X)$$

zu zeigen bleibt. Nun ist aber nach 3.1 $LF_X(f_0) \in Y_X^p E_p f_0(p)$, und trivialerweise haben wir $(Y_X^p E_p f_0(p))/Y_X^p \in E_p f_0(p)$. Folglich müssen wir lediglich noch

$$E_p f_0(p) \in QR_0 E_{\Phi_X}^0 QR_0 E'_{\Phi_X} Q([QR_0 F]/Y_X)$$

verifizieren, aber das folgt aus (a) in Verbindung mit $Y_X \in Y_X^p$ (was $H/Y_X^p \in H/Y_X$ für $H = QR_0 F$ zur Folge hat).

(c) Bereits beim Beweis von (b) haben wir die Gültigkeit von $F \in LF_X(f_0)$ dargetan und folgern daraus jetzt für die Formation

$$H = (QR_0 E_{\Phi_X}^0 QR_0)(E'_{\Phi_X} QR_0)F$$

mittels des schon bewiesenen Teils von 3.8

$$(E_{\Phi_X}^0 \sigma_w E_{\Phi_X}^0)H \in LF_X(f_0).$$

Umgekehrt sei $G \in LF_X(f_0)$ und $C = G_{Y_X}$, $B = F(C) \cap O_X(C)$ sowie $A = \Phi(B)$. Zum Nachweis von $G \in (E_{\Phi_X}^0 \sigma_w E_{\Phi_X}^0)H$ genügt es selbstverständlich, unter der Annahme $A = 1$ die Beziehung $G \in \sigma_w E_{\Phi_X}^0 H$ zu verifizieren.

Nach (b) gilt jedenfalls $G/C \in H$, d.h., $G^H \in C$, aber dann folgt sogar $G^H \in B$: Es ist nämlich erstens jeder Hauptfaktor von G zwischen $G^H B$ und B eine abelsche X -Gruppe, denn zu einem so gelegenen Hauptfaktor H/K mit Charakteristik $E \in X'$ existierte eine monolithische Faktorgruppe G/M von G mit $K \in M$ und $S(G/M) = HM/M$, wobei aus $G \in LF_X(f_0)$ nach Definition von f_0 bereits $G/M \in f_0(E) \in QR_0 F \in H$ und somit $G^H \in M$ folgte, und weiter ist jeder X -Hauptfaktor

von G unterhalb C nach 2.7e frattinisch für C ; und zweitens sehen wir jetzt $G^H B \in E_X$ und also $G^H B \in O_X(C) \in Z_\omega(C) \in F(C)$ (da $C \in Y_X$), d.h., $G^H B = B$ ein.

Aus $A = 1$ folgern wir, daß B elementarabelsch (nicht notwendig von Primzahlpotenzordnung) ist, und 2.7b zeigt weiter, daß $B \in Z_\omega(C)$ gilt. Tatsächlich ist sogar $B \in Z(C)$: Für jedes $p \in \pi(B)$ induziert C ja eine p -Gruppe von Automorphismen auf $O_p(B)$, aber $C \in Y_X^p$ ist nach 2.7d ohne p -Faktorgruppe ungleich 1 (man wende hier für $C/C_C(B) \in E_p$ etwa 1.2b an!).

Durch Anwendung von [12], VI.7.22, auf die nichttrivialen Sylowgruppen von B konstruieren wir jetzt eine nilpotente Gruppe D , auf der G durch Automorphismen operiert, mit folgenden Eigenschaften:

$$D/\phi(D) \cong_G B \oplus \left(\bigoplus_{p \in \pi(B)} 1_G^p \right), \phi(D) \cong_G B, \text{ und } C_G(D) = C_G(B) \cong C.$$

Sei $H = GD$ das semidirekte Produkt. Wegen $[C, D] = 1$ und $D \in E_X \cap N$ erfüllt dieses $H_{Y_X} = G_{Y_X} = C$, und aus $G \in LF_X(f_0)$ folgt mit $B \in E_X$ und nach Konstruktion von D offenbar $H/C \in LF_X(f_0)/Y_X \in H$: Man beachte $(G/C_G(1_G^p))1_G^p \cong Z_p \in LF_X(f_0)$ für alle $p \in \pi(B) \in X(X)$ und wende nochmals (b) an. Da auch $H/BD \cong G/B \in H$ gilt, erhalten wir $H^H \in BD \cap C = B(D \cap C) = B$. Weiter finden wir in $B\phi(D) = B \times \phi(D)$ wegen $B \cong_H \phi(D)$ eine H -invariante sog. Diagonaluntergruppe $M \cong_H B$. Aufgrund von $M \cap D = 1$ ist $DM/M \cong D$, und wir erkennen, $\phi(D)M/M \in \phi(DM/M)$ beachtend, daß $H/M \in E_{\phi_X}^0 \{H/B \times \phi(D)\} \in E_{\phi_X}^0 H$ ist. Schließlich ergibt sich unsere Behauptung $G \in \sigma_{w, \phi_X}^0 H$ aus $HM/M = (GM/M)(DM/M)$ mit $GM/M \cong G/G \cap M = G/1$ und $DM/M \in F(H/M)$. \square

3.10 KOROLLAR. (a) Der von Q, R_0 und E_{ϕ_X} erzeugte Abschlußoperator wird durch

$$\{Q, R_0, E_{\phi_X}\} = (E_{\phi_X}^0 \sigma_w E_{\phi_X}^0)(QR_0 E_{\phi_X}^0 QR_0)(E_{\phi_X}^0 QR_0) = (E_{\phi_X}^0 QR_0)^4$$

beschrieben.

$$(b) LF_{X_0}(f_0) = (QR_0 E_{\phi_X})^2 F, \{Q, R_0, E_{\phi_X}\} = (QR_0 E_{\phi_X})^2.$$

$$(c) LF_{\mathbb{P}}(f_0) = QR_0 E_{\phi_X} QR_0 F \text{ für } F \in S = E_{\mathbb{P}}, \{Q, R_0, E_{\phi_X}\} = QR_0 E_{\phi_X} QR_0 \text{ in } S.$$

Beweis. (a) folgt sofort aus 3.9c und

$$\begin{aligned} \{Q, R_0, E_{\phi, X}\} F &\subseteq \{Q, R_0, E_{\phi, X}\} LF_X(f_0) \text{ (nach 3.9c)} \\ &= LF_X(f_0) \text{ (nach dem bewiesenen Teil von 3.8)} \\ &\subseteq \{Q, R_0, E_{\phi, X}\} F \text{ (wiederum nach 3.9c).} \end{aligned}$$

(b) Genaues Lesen des Beweises von 3.9, insbesondere der Beweisteile (1+6) von (a), zeigt wegen

$$V_{X_0}^p = E_p, \text{ (vgl. unsere Anmerkungen nach 2.7),}$$

daß wir unter der gegenwärtigen Voraussetzung mit F_p^* anstelle von $F_p^\#$ in jenem Beweis auskommen, und daß infolgedessen in 3.9a,b dann $[QR_0 F]$ durch F ersetzt werden darf. Dies gestattet Ersetzen des Terms $(E_{\phi}^! QR_0)$ durch $(E_{\phi}^! Q)$.

Weiter ergibt Anwendung von 3.9b jetzt, da V_{X_0} nach 2.7e die aus den Gruppen der Ordnung 1 bestehende Gruppenklasse ist,

$$LF_{X_0}(f_0) = QR_0 E_{\phi}^0 QR_0 E_{\phi}^! QF = (QR_0 E_{\phi}^0)^2 (QF).$$

Daß (QF) hier sogar durch F ersetzt werden darf sieht man durch eine einfache Anwendung des verschärften Jordan-Hölder-Satzes I.1.4b ein; die Operatoren E_{ϕ}^0 und $E_{\phi}^!$ dürften wegen 3.8 hier durch E_{ϕ} ersetzt werden — man bemerke dazu

$$E_{\phi, X_0} = E_{\phi}.$$

(c) erhält man aus dem Beweis von (b) wegen $E_{\phi}^! F = F$ für $F \subseteq S$. \square

Unser Beweis des Gaschütz-Lubeseder-Baer-Satzes 3.9 ist jetzt vollständig. Bevor wir uns einige Spezialfälle ansehen weisen wir darauf hin, daß etwa 3.10 auch mit einem zu einer anders definierten X -Frattinigruppe definierten Sättigungsoperator richtig bleibt, solange diese im wesentlichen die zu Beginn von Abschnitt 2 aufgestellten Forderungen erfüllt: An 3.8 liest man ja u.a. auch die Äquivalenz der verschiedenen Sättigungsbegriffe ab.

Für $X = \emptyset$ sagt 3.8 selbstverständlich nichts aus, da dann jede Formation X -lokal erklärbar ist. Für $X = \mathbb{P}$ erhalten wir einen Satz von Baer (vgl. [1]), der den Gaschütz-Lubeseder-Satz für $V = S$ als Spezialfall umfaßt:

3.11 KOROLLAR (Baer). Für eine Formation F sind gleichwertig:

- (i) F ist auflösbar lokal erklärbar (d.h., \mathbb{P} -lokal erklärbar).
- (ii) F ist auflösbar gesättigt (d.h., $G/\phi(N) \in F$ für $S \triangleright N \trianglelefteq G$ impliziert $G \in F$).
- (iii) F ist nilpotent gesättigt (d.h., $G/\phi(N) \in F$ für $N \triangleright N \trianglelefteq G$ impliziert $G \in F$).

Für $X = X_0$ erhalten wir die Schmid'sche Version (aus [15]) des ursprünglichen Gaschütz-Lubeseder-Satzes:

3.12 KOROLLAR (Gaschütz, Lubeseder, Schmid). Für eine Formation F sind gleichwertig:

- (i) F ist lokal erklärbar.
- (ii) F ist gesättigt.

Natürlich können wir hier ebenfalls eine dritte äquivalente Bedingung hinzufügen, die der Baerschen Bedingung 3.11iii entspricht; jedoch können wir dabei, solange unsere Vermutung aus Abschnitt 2 nicht geklärt ist, nicht einfach N bzw. $F(G)$ durch N' bzw. $F'(G)$ ersetzen.

Abschließend wollen wir noch als Beispiel die von der Schunckklasse N' der verallgemeinert nilpotenten Gruppen erzeugte gesättigte Formation kurz besprechen. Zu diesem Zweck halten wir fest, daß sich das folgende, für $V = S$ wohlbekannte Lemma wie in [7] leicht beweisen läßt:

3.13 LEMMA. Sei $F = LF_X\{f\}$ und C einer der Abschlußoperatoren S, S_n, N_0 .

- (a) $Cf(X) = f(X)$ für alle $X \in \mathcal{X}(X) \cup X'$ impliziert $CF = F$.
- (b) Ist f inklusiv und voll, so gilt in (a) auch die Umkehrung.

3.14 BEISPIEL. Für alle $p \in \mathbb{P}$ setzen wir

$$f(p) = D_0(X_0)_p$$

und bilden

$$\bar{N}^1 = LF_{X_0}(f).$$

Dann ist \bar{N}^1 die kleinste gesättigte Formation $F \ni \bar{N}^1$ (oder auch $F \ni X_0$),
und \bar{N}^1 ist eine nicht S-abgeschlossene Fittingklasse.

Für alle $G \in E$ gilt offenbar $F'(G) \leq G_{\bar{N}^1}$.

Literaturverzeichnis.

- [0] P.FÖRSTER: Projektive Klassen endlicher Gruppen.I.Schunck- und Gaschützklassen. Math.Z. 186, 149 - 178 (1984).
- [1] R.BAER,P.FÖRSTER: Einbettungsrelationen und Formationen endlicher Gruppen. Erscheint.
- [2] R.BAER: Supersoluble immersion. Can.J.Math. 11, 353 - 369 (1959).
- [3] H.BENDER: On groups with abelian Sylow 2-subgroups. Math.Z. 117, 164 - 176 (1970).
- [4] R.M.BRYANT,R.A.BRYCE,B.HARTLEY: The formation generated by a finite group. Bull.Austral.Math.Soc. 2, 347 - 357 (1970).
- [5] R.W.CARTER,T.O.HAWKES: The F-normalizers of a finite soluble group. J.Algebra 5, 175 - 202 (1967).
- [6] J.COSSEY,S.OATES-MACDONALD: On the definition of saturated formations of groups. Bull.Austral.Math.Soc. 4, 9 - 15 (1971).
- [7] K.DOERK: Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen. J.Algebra 13, 345 - 373 (1969).
- [8] K.DOERK,T.O.HAWKES: Finite Soluble Groups. Preprint.
- [9] W.GASCHÜTZ: Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden. Math.Z. 60, 274 - 286 (1954).

- [10] R.L.GRIESS,P.SCHMID: The Frattini module. Arch.Math. 30, 256 - 266 (1978).
(1978).
- [11] P.HALL: Some sufficient conditions for a group to be nilpotent.
Illinois.J.Math. 2, 787 - 801 (1958).
- [12] B.HUPPERT: Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
- [13] B.HUPPERT: Zur Theorie der Formationen. Arch.Math. 19, 561 - 574 (1968).
- [14] P.SCHMID: Formationen und Automorphismengruppen. J.London Math.Soc. 7,
83 - 94 (1973).
- [15] P.SCHMID: Every saturated formation is a local formation. J.Algebra
51, 144 - 148 (1978).

Rebut el 12 de desembre del 1984

Department of Mathematics
Monash University
Clayton, Vic.
3168 AUSTRALIA