Pub. Mat. UAB
Vol. 27 Nº 2 Juny 1983

REFLEXIVIDAD Y AUTODUALIDAD EN ESPACIOS VALUADOS

José M. Bayod y J. Martínez Maurica

En anteriores trabajos, [5], [1], los autores han estudiado espacios normados no arquimedianos sobre cuerpos dotados de la valuación trivial (también conocidos con el nombre de espacios valuados), obteniendo caracterizaciones de la reflexividad y la autodualidad para los V-espacios, es decir, espacios del tipo anterior que son completos y además tienen los valores de la norma contenidos en algún conjunto de la forma

$$\{0\} \cup \{r^n : n \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad r > 1 \ .$$

En este artículo, haciendo uso de las bases ortogonales estudiadas por los autores en [2] y [3] se obtienen nuevas caracterizaciones de la reflexividad y la autodualidad en espacios valuados cualesquiera, que se recogen en los teoremas 4 y 8.

En lo que sigue, E será un <u>espacio valuado</u>, es decir, un espacio normado no arquimediano sobre un cuerpo K conmutativo dotado de la valuación trivial. Un subconjunto X de E se dice que es <u>ortogonal</u> cuando para cualquier combinación lineal de elementos suyos con coeficientes no nulos,

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| = \max \{ \|x_1\| , \ldots , \|x_n\| \} ;$$

y se dice que X es <u>base ortogonal</u> (o <u>distinguida</u>) de E si es ortogonal y la envoltura lineal cerrada de X es E. Diremos que E es de tipo contable cuando contiene algún subespacio denso de dimensión contable. Indicaremos con $\|E\|$ el conjunto $\{ \|x\| : x \in E, x \neq 0 \}$.

<u>DEFINICION</u> 1.- Una base ortogonal de E se dice <u>localmente finita</u> cuando para cada par de números reales r , s , el conjunto

$$X_{[r,s]} = \{x \in X : \|x\| \in [r,s] \}$$

es finito. Y se dice que X es puntualmente finita cuando para cada número real positivo r, el conjunto $X_r = X_{[r,r]}$ es finito.

Conviene notar que en las referencias [5] y [6] se reserva el nombre de "localmente finita" para lo que aquí llamamos "puntualmente finita".

TEOREMA 2.- Cualquier espacio valuado reflexivo tiene base ortogonal, y todas sus bases ortogonales son localmente finitas.

Demostración.- Sea E un espacio valuado, y X un subconjunto suyo ortogonal maximal; supóngase que la envoltura lineal cerrada de X, D, es distinta de E. Por el Teorema de Ingleton, el anulador $D^{\perp}=\{x'\in E':x'(D)=0\}$ es no nulo, y $D^{\perp\perp}\neq E''=E$. Pero $D^{\perp\perp}$ es esféricamente completo por ser isométrico al dual de $E'/D^{\perp}$, y por tanto hay un elemento en E ortogonal a todo $D^{\perp\perp}$, en contra de la maximalidad de X.

Supóngase ahora que X es una base ortogonal de E y que $r,s\in(0,+\infty)$. Llamando D a la envoltura lineal cerrada de $X_{[r,s]}$, es fácil ver que D es complementado y por tanto reflexivo (Cf. [7], pg. 122). Ahora bien, por ser D además discreto y acotado, debe ser de dimensión finita (Cf. [6], pg. 76). Por tanto, $X_{[r,s]}$ es finito.

COROLARIO 3.- Si E es reflexivo,

(a) E es de tipo contable.

(b) $\|E\|$ carece de puntos de acumulación no nulos.

(c) E y E' tienen base ortogonal.

Demostración: (a) y (b) se siguen del Teorema 2. Y(c) es consecuencia de (b), gracias a las caracterizaciones obtenidas en [3] sobre existencia de bases en duales.

La reflexividad en espacios normados no arquimedianos presenta un comportamiento muy distinto según la valuación del cuerpo base. Así como los únicos espacios reflexivos sobre cuerpos esféricamente completos y no triviales son los de dimensión finita, y para cada cuerpo no esféricamente completo existen sobre él espacios reflexivos de dimensión mayor que cualquier cardinal no medible previamente fijado, la situación en cuerpos con valuación trivial es en cierta forma intermedia, como ha quedado probado en el Corolario 3(a) (es fácil dar ejemplos de V-espacios reflexivos de dimensión infinita).

TEOREMA 4.- Las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) E es reflexivo

(ii) E es completo y tiene base ortogonal localmente finita.

(iii) E es linealmente isométrico a un espacio de la forma

$$c_0(N,s) = \{(x_n) \subset K : \lim |x_n| s_n = 0\}$$

dotado de la norma $||(x_n)|| = \sup |x_n| s_n$, donde $s = (s_n)$ es una sucesión de números reales positivos sin límites de oscilación en $(0,+\infty)$.

Demostración: Del Corolario 3 se sigue que (i) implica (ii) y (ii) implica (iii). En cuanto a la demostración de que (iii) implica (i), puede verse en [4] que bajo las condiciones impuestas a la sucesión $s, c_0(N,s)' = \ell^\infty(N,s^{-1})$, y $\ell^\infty(N,s^{-1})' = c_0(N,s)$.

En la referencia [4] aparecen también enunciadas la equivalencia entre (i) y (iii) y la propiedad (a) del Corolario 3, así como otras propiedades de la reflexividad no relacionadas con las bases ortogonales.

La siguiente definición está tomada de [1]:

DEFINICION 5.- Se dice que E es autodual cuando existe una isometría lineal suprayactiva $h: E \longrightarrow E'$ que cumple

$$h = h' \circ j,$$

donde $j: E \longrightarrow E''$ es la aplicación canónica, y h' es la aplicación conjugada de h.

Es evidente que cualquier espacio autodual es reflexivo.

LEMA 6.- Si X es base ortogonal de E, la colección $X' \subset E'$ definida por $X' = \{x' : x \in X\}$, donde

$$x'(y) = 0 \text{ si } x \neq y;\ x'(x) = 1,$$

es ortogonal.

Demostración: Como para cada $f \in E'$ no nula,

$$||f|| = \sup \{ \frac{1}{||x||} : x \in X, f(x) \neq 0 \},$$

es obvio que dado $x \in X$, x' es acotado y $||x'|| = \frac{1}{||x||}$

Además, si $x_1,\ldots,x_n \in X$, y $\alpha_1,\ldots, \alpha_n \in K - \{0\}$,

$$||\alpha_1 x_1' + \ldots + \alpha_n x_n'|| = \sup \{\frac{1}{||x||}: x \in X, \alpha_1 x_1'(x) + \ldots + \alpha_n x_n'(x) \neq 0\} =$$

$$= \sup\{ \frac{1}{||x_i||} : i=1,\ldots,n\} = \max \{ ||x_1'||,\ldots,||x_n'||\}$$

LEMA 7.- Si X es base ortogonal de E e $Y \subset E$ es un conjunto ortogonal cuyos elementos tienen norma constantemente igual a t, $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X_t)$.

Demostración: Basta tener en cuenta que en el espacio vectorial cociente

$$\overline{E} = \{ x \in E: ||x|| \leq t \}/ \{x \in E: ||x|| < t\},$$

la colección de clases $\overline{Y}$ es libre, y la coleccion $\overline{X}_t$ es una base; y que a vectores ortogonales de norma t corresponden clases distintas.

TEOREMA 8.- Las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) E es autodual

(ii) $||E||$ es discreto como espacio topológico, y E es completo y tiene una base ortogonal X puntualmente finita de modo que para todo $t > 1$,

$$\mathrm{card}(X_t) = \mathrm{card}(X_{1/t}).$$

Demostración: Si E es autodual, por el Teorema 4, $||E||$ es discreto y hay en E una base ortogonal localmente finita, X. Entonces $h(X)$ es base ortogonal de E', y basta con demostrar que si $t > 0$, $\mathrm{card}\ h(X_t) = \mathrm{card}\ h(X_{1/t})$ y para ello que $\mathrm{card}(X_t) \leq \mathrm{card}\ h(X_{1/t})$.

Ahora bien, cada $x \in X_t$ induce una forma lineal continua $x' \in E'$ como se explica en el Lema 6, y X_t' es coordinable con X_t y es una colección ortogonal de vectores de norma $1/t$, luego por el Lema 7, $\mathrm{card}(X_t) \leq \mathrm{card}\ h(X_{1/t})$.

Recíprocamente, supóngase que E cumple todas las propiedades de la parte (ii). Para cada $t > 1$, sea $g_t : X \longrightarrow X_{1/t}$ una biyección, y defínase $g : X \longrightarrow X$ mediante: para cada $x \in X$,

$$g(x) = x \text{ si } ||x|| = 1,$$

$$g(x) = g_t(x) \text{ si } ||x|| = t > 1,$$

$$g(x) = g_t^{-1}(x) \text{ si } ||x|| = 1/t < 1.$$

(Observar que g^2 es la identidad sobre X.) Para cada $x \in X$ sea $h(x): E \longrightarrow K$ dado por:

$$h(x)(y) = 0 \text{ si } g(x) \neq y;\ h(x)(y) = 1 \text{ si } g(x) = y.$$

Prolónguese h por linealidad y continuidad a todo E, $h : E \longrightarrow E'$. Esta h cumple las condiciones de la Definición 5.

En efecto, es inmediato que se trata de una isometría lineal. Además, si $x, y \in X$,

$$(h' \circ j)(x)(y) = h(y)(x)$$

vale 0 si $g(y) \neq x$, y 1 si $g(y) = x$. Y $h(x)(y)$ vale 0 si $g(x) \neq y$, y 1 si $g(x) = y$; por ser g^2 la identidad, se sigue que $h' \circ j = h$.

En cuanto a la suprayectividad, como $h(E)$ es completo, es cerrado en E', luego si $h(E) \neq E'$, existe algún $z'' \in E''$ no nulo y tal que $z''(h(E)) = 0$. Ahora bien, por el Teorema 4 E es reflexivo, luego $z'' = j(z)$ para un $z \in E$ no nulo, lo que es absurdo, pues para todo x de X,

$$0 = j(z)(h(x)) = h(x)(z) = h(z)(x),$$

luego $h(z) = 0$, imposible por ser h isometría.

Una representación análoga a la expuesta en la pa[illegible] (iii) del Teorema 4 se tiene también para espacios autoduales, con modificaciones obvias.

Varias de las propiedades vistas en [1] solamente para V-espacios autoduales pueden ahora demostrarse para espacios valuados cualesquiera. Por ejemplo, las demostraciones para V-espacios de las siguientes propiedades se trasladan al caso general (para notaciones y demostraciones, ver [1], Teorema 9 y su Corolario, y Teorema 10):

COROLARIO 9.- Si E es autodual,

(a) E es un (K)-espacio

(b) Si L es un subespacio lineal de E, L es (K)-espacio si y sólo si $L^{\perp}$ es ortogonal nórmico a L.

(c) Si E contiene algún vector no nulo de norma distinta de la unidad, contiene necesariamente algún subespacio cerrado que no es ortocomplementado.

REFERENCIAS

1. BAYOD, J.M. Espacios autoduales sobre cuerpos con valoracion trivial. Rev. Mat. Hisp.-Amer., 40 (1980), 75-85.
2. BAYOD, J.M. y MARTINEZ MAURICA, J. A characterization of the spherically complete normed spaces with a distinguished base. (Se publicará en Compositio Math.)
3. BAYOD, J.M. y MARTINEZ MAURICA, J. Bases en espacios valuados. Actas de las IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Salamanca, 1982.
4. ERENS, W.L.J. Niet-Archimedische Banachruimten. Master's Thesis, Nijmegen Klatolieke Universiteit, 1974
5. MARTINEZ MAURICA, J. Diagramas de estados de operadores entre espacios normados no arquimedianos. Tesis, Universidad de Bilbao, 1977.
6. ROBERT, P. On some non-Archimedean normed linear spaces. Compositio Math., 19 (1968), 1-77.
7. VAN ROOIJ, A.C.M. Non-Archimedean Functional Analysis. Marcel Dekker, New York, 1978.

Rebut el 6 de maig de 1.982

J.M. Bayod y J.M. Maurica
Facultad de Ciencias
Universidad de Santander
Santander

ESPAÑA