Pub. Mat. UAB
Vol. 27 Nº 2 Juny 1983

GENERALITZACIONS PER AUTOMORFOS DELS GRUPS NILPOTENTS

Pilar Martín Salvador

ABSTRACT: It is known that a group A of automorphisms of G stabilizes a series of G, $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_r = G$, if $[G_i, A] \leq G_{i-1}$, $1 \leq i \leq r$. This sentence generalizes one of the characterizations of nilpotent groups. Analogously, we introduce other generalizations of the nilpotent groups (the A-nilpotent groups and the A-Sylow groups) and we study the relationship among all them.

En aquest treball introduïm i relacionem entre si diverses definicions que generalitzen les següents conegudes caracteritzacions dels grups nilpotents finits: G estabilitza una sèrie seva; qualsevol subgrup maximal de G és normal en G; qualsevol subgrup de Sylow de G és normal en G; $[G,G] \leq \Phi(G)$. Per G denotarem sempre un grup finit i per A un subgrup del grup d'automorfismes de G.

1. *Definició (v. [3], pag. 178)*

Siga $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \ldots \triangleleft G_r = G$ una sèrie de G. Direm que A estabilitza la sèrie donada si A normalitza cada G_i i si $[G_i, A] \leq G_{i-1}$, $1 \leq i \leq r$.

Si A = Int(G) obtenim la primera caracterització dels nilpotents. Observe's que si A és el grup d'automorfismes interns induïts pel subgrup de Fitting, F(G), aleshores A estabilitza una sèrie de G i F(G) és el major subgrup normal de G amb aquesta propietat.

2. *Definició*

Un grup G és A-nilpotent si tot maximal de G és A-invariant.

Per a A = Int(G) hi obtenim els nilpotents i, per a A = Aut(G), els supernilpotents (v. [6]). Si A és el grup d'automorfismes interns induïts pel subgrup $\Delta(G)$ ($\Delta(G)$ és la intersecció de tots els maximals no normals de G), aleshores G és A-nilpotent i $\Delta(G)$ és el major subgrup de G amb aquesta propietat.

3. *Definició*

Un grup G és A-Sylow si per a cada primer p divisor de $|G|$ existeix un p-subgrup de Sylow de G que és A-invariant.

Si $Int(G) \leq A$, aleshores G és A-Sylow si, i sols si, G és nilpotent. Si G o A són resolubles i $(|G|,|A|) = 1$, aleshores G és A-Sylow. Si A és un subgrup de Aut(G) lliure de punts fixes, aleshores G és A-Sylow (v. [3], pags. 224. 335). Si A és el grup d'automorfismes interns induïts per l'hipercentre $Z_\infty(G)$, aleshores G és A-Sylow i $Z_\infty(G)$ és el major dels subgrups normals, H, de G per als que G és H-Sylow. Si $Int(G) \leq N_{Aut(G)}(A)$, aleshores G és A-Sylow si, i sols si, tot subgrup de Sylow de G és A-invariant; per tant, de [1] deduïm que, si $Int(G) \leq N_{Aut(G)}(A)$ aleshores G és A-Sylow si, i sols si, $[G,A] \leq Z_\infty(G)$.

4. *Proposició*

Si A estabilitza una sèrie de G, aleshores $[G,A] \leq \Phi_A(G)$.

<u>Demostració</u>: Per $\Phi_A(G)$ entenem la intersecció de tots els A-subgrups maximals de G (veure [7]). Siga M un A-subgrup maximal de G; com que A estabilitza una sèrie de G, aleshores $[G,A,A,\ldots,A] = 1 \leq M$. Pel lema (1.4) de [2], $M \leq M[G,A] < G$, és a dir, $M = M[G,A]$ i $[G,A] \leq M$. Per tant, $[G,A] \leq \Phi_A(G)$.

4.1 *Corol.lari*

Si G és un grup característicament simple i $A \trianglelefteq Aut(G)$, aleshores A estabilitza una sèrie de G si, i sols si, $A = 1$.

<u>Demostració</u>: Immediata a partir del corol.lari (2.2) de [7] i de la proposició 4.

4.2 *Corol.lari*

Si A estabilitza una sèrie de G, els A-subgrups maximals de G són maximals.

<u>Demostració</u>: Siga M un A-subgrup maximal de G i M' un maximal tal que $M \leq M'$. Com que $[M',A] \leq [G,A] \leq M \leq M'$, aleshores M' és A-subgrup i $M = M'$.

5. *Proposició*

$[G,A] \leq \Phi(G)$ si, i sols si, G és A-nilpotent i A estabilitza una sèrie de G.

Demostració: Si $[G,A] \leq \Phi(G)$ i M és un subgrup maximal de G, com que $[M,A] \leq [G,A] \leq \Phi(G) \leq M$, es verifica que M és A-invariant, és a dir, que G és A-nilpotent. A més, de [8], teorema 3.1, es dedueix que A estabilitza una sèrie de G.

Inversament, si G és A-nilpotent, aleshores $\Phi_A(G) = \Phi(G)$ i, per la proposició 4, $[G,A] \leq \Phi(G)$.

5.1 *Corol.lari*

$[G,\Delta(G)] \leq \Phi(G)$ i $\Delta(G)$ és el major subgrup de G amb aquesta propietat.

5.2 *Corol.lari*

Si $A \leq Int(G)$, aleshores $[G,A] \leq \Phi(G)$ si, i sols si, G és A-nilpotent.

Observe's que l'afirmació feta en el Corol.lari 5.1 és equivalent a dir que $\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$ (v. [4], pag. 276).

6. *Teorema*

Si A i G són abelians i $[G,A] \leq \Phi_A(G)$, aleshores A estabilitza una sèrie de G i el producte semidirecte de G per A, G^*, és A-nilpotent.

Demostració: Com que G és un subgrup normal abelià de G^*, en resulta que $\Phi_{G^*}(G) \leq \Phi(G^*)$. D'altra banda, $\Phi_{G^*}(G) = \bigcap\{M$ / M és G^*-invariant maximal de G$\} = \bigcap\{M$ / M és GA-invariant maximal de G$\} = \bigcap\{M$ / M és A-invariant maximal de G$\} = \Phi_A(G)$. Per tant, $\Phi_A(G) \leq \Phi(G^*)$ i, com que A és abelià, tenim $[G^*,A] = [G,A] \leq \Phi_A(G) \leq \Phi(G^*)$. En conseqüència, G^* és A-nilpotent i A estabilitza una sèrie de G^*, per la qual cosa també n'estabilitza una de G.

7. *Lema*

Siga G un p-grup. G és A-nilpotent si, i sols si, A indueix sobre $G/\Phi(G)$ un grup d'automorfismes escalars.

Demostració: És anàloga a la del Teorema 3 de [6].

8. *Teorema*

Si G és un p-grup A-nilpotent, aleshores $[G,A] \leq \Phi(G)$, o bé $[G,A] = G$.

Demostració: Si $A/C_A(G/\Phi(G)) = 1$, aleshores $[G,A] \leq \Phi(G)$. Si, pel contrari, $A \neq C_A(G/\Phi(G))$, aleshores $[A/C_A(G/\Phi(G)) , G/\Phi(G)] = G/\Phi(G)$. En efecte, siga α un element de Z/pZ, $\alpha \neq 1$, tal que l'automorfisme escalar del Z/pZ-espai vectorial $G/\Phi(G)$ definit per α, f_α, pertanya al grup $A/C_A(G/\Phi(G))$. Siga $\beta \in Z/pZ$ tal que $(\alpha-1)\beta = 1$. Denotem per $\circ$ la llei externa de l'espai vectorial $G/\Phi(G)$. Per a tot $x \in G/\Phi(G)$ es verifica: $x = 1\circ x = ((\alpha-1)\beta)\circ x = (\alpha-1)\circ(\beta\circ x) = (\beta\circ x)\overset{\alpha-1)}{\ldots\ldots}(\beta\circ x) =$
$= (\beta\circ x)^{-1}(\beta\circ x)\overset{\alpha)}{\ldots\ldots}(\beta\circ x) = (\beta\circ x)^{-1}f_\alpha(\beta\circ x) \in [A/C_A(G/\Phi(G)) , G/\Phi(G)]$.

En els casos que, en la hipòtesi del teorema, tinguem $p = 2$ o $A \leq \mathrm{Int}(G)$, sempre es complirà $[G,A] \leq \Phi(G)$.

9. *Teorema*

Si G és un grup A-nilpotent, aleshores A és superresoluble i $[G,A] \leq \Delta(G)$. Si, a més, $\Delta(G) = Z_\infty(G)$, aleshores G és un grup A-Sylow.

Demostració: Siga $X = \{M \leq G \ / \ M \text{ és maximal}\}$ i siga $A(X) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(G) \ / \ M^\alpha = M \ \ \forall M \in X\}$. Com que $A \leq A(X)$, tenim que A és superresoluble (veure [4], teorema 3.4). D'altra banda, si en (2.2.a) de [4] prenem com a Ω el conjunt X, es verifica que $C_A(X)$ centralitza el grup quocient $N_G(X)/C_G(X)$, és a dir, $[G,A] \leq \Delta(G)$. Si, a més, $\Delta(G) = Z_\infty(G)$, tots els elements de A són automorfismes hipercentrals, la qual cosa implica que tots els subgrups de Sylow de G són A-invariants (veure [1]) i, en conseqüència, G és A-Sylow.

10. *Contraexemples*

En funció de diverses hipòtesis sobre A, estudiem a continuació la relació entre els quatre enunciats següents: (1) A estabilitza una sèrie de G. (2) G és A-nilpotent. (3) $[G,A] \leq \Phi(G)$. (4) G és A-Sylow.

a) Si $A = \mathrm{Int}(G)$, aleshores $(4) \longleftrightarrow (3) \longleftrightarrow (2) \longleftrightarrow (1)$.

b) Si A és el grup d'automorfismes interns induïts per un subgrup normal H de G, aleshores

$$(4) \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} (3) \longleftrightarrow (2) \underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow} (1)$$

En efecte:

i) $(4) \longrightarrow (3)$. Car si G és A-Sylow, aleshores $H \leq Z_\infty(G) \leq \Delta(G)$, i, per tant, $[G,H] = [G,A] \leq \Phi(G)$.

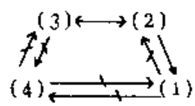
ii) $(3) \longleftrightarrow (2)$ pel Corol.lari 5.2.

iii) $(2) \longrightarrow (1)$. Car si G és A-nilpotent, aleshores $H \leq \Delta(G) \leq F(G)$ i, en conseqüència, A estabilitza una sèrie de G.

iv) $(3) \not\longrightarrow (4)$. És suficient prendre un grup G on $Z_\infty(G) < \Delta(G)$, per exemple el grup dièdric $D_9 = \langle x,y \ / \ x^9 = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$. Siga A el grup d'automorfismes interns induïts per $\Delta(D_9) = \langle x^3\rangle$. Com que $[D_9,A] = [D_9,\Delta(D_9)] \leq \Phi(D_9)$, es compleix (3) però D_9 no és A-Sylow car $\Delta(D_9) \not\leq Z_\infty(D_9) = 1$.

v) $(1) \not\longrightarrow (2)$. És suficient prendre un grup G on $\Delta(G) < F(G)$, per exemple D_9. Siga A el grup d'automorfismes interns induıts per $F(D_9)$; com que $\Delta(D_9) = \langle x^3\rangle < F(D_9) = \langle x\rangle$, es segueix que A estabilitza una sèrie de D_9 però D_9 no és A-nilpotent.

c) Siga A el grup d'automorfismes interns induïts per un subgrup qualsevol H de G. Aleshores,



En efecte:

i) $(3) \longleftrightarrow (2)$, $(2) \longrightarrow (1)$, $(1) \not\longrightarrow (2)$, $(3) \not\longrightarrow (4)$ i $(1) \not\longrightarrow (4)$. Per la mateixa raó que en l'apartat b).

ii) $(4) \not\longrightarrow (3)$. En efecte, siga $G = \Sigma_4$ i siga $H = \langle(1,2)\rangle$. Com que el 2-subgrup de Sylow $P_2 = [\langle(1,4,2,3)\rangle]\langle(1,3),(2,4)\rangle$ és A-invariant i el 3-subgrup de Sylow $P_3 = \langle(1,2,3)\rangle$ és A-invariant, G és A-Sylow; però no es compleix (3) car $[G,A] = [G,H] \not\leq \Phi(G) = 1$.

iii) $(4) \not\longrightarrow (1)$. En efecte, si agafem el mateix exemple anterior, G és A-Sylow però A no estabilitza cap sèrie de G.

d) Siga A un grup qualsevol de Aut(G). Aleshores,

En efecte,

i) $(3) \longrightarrow (2)$ i $(3) \longrightarrow (1)$. Per la proposició 5.

ii) $(2) \not\longrightarrow (3)$. En efecte, siga $G = C_3$; aquest grup és supernilpotent però $[C_3,\mathrm{Aut}(C_3)] = C_3 \not\leq \Phi(C_3)$.

iii) $(2) \not\longrightarrow (1)$ car, per exemple, C_3 és supernilpotent però

$\mathrm{Aut}(C_3)$ no estabilitza una sèrie de C_3.

iv) $(1) \not\longrightarrow (3)$ car si $G = \langle a,b \,/\, a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ b^{-1}ab = b^{-1}\rangle$ i $A = \langle \alpha \rangle$, essent α l'automorfisme de G tal que $a^\alpha = a^{-1}$ i $b^\alpha = ab$, aleshores A estabilitza la sèrie $1 \triangleleft Z(G) \triangleleft \langle a\rangle \triangleleft G$, però $[G,A] = \langle a\rangle$ i $\langle a\rangle$ no està contingut en $\Phi(G)$.

Els altres casos es raonen com en l'apartat c). En particular, per a $A = \mathrm{Aut}(G)$ els grups abelians no cíclics verifiquen (4) però no verifiquen (2).

REFERÈNCIES

[1] **Adney, J.E. and Deskins, W.E.** On Automorphisms and Subgroups of Finite Groups II. Arch. der Math., Vol. XVIII (1967).

[2] **Blessenohl, D. und Laue, H.** Vorzeichen von Automorphismen endlicher Gruppen und Beispiele normaler Fittingklassen. Math. Z., 148, 119-126 (1976).

[3] **Gorenstein, D.** Finite Groups. Harper-Row, New York (1968).

[4] **Huppert, B.** Endliche Gruppen I. Springer-Verlag, Berlin (1979).

[5] **Laue, H.** Kerne von Permutationsdarstellungen der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe. Arch. Math. Vol. XXVII, 463-472 (1976).

[6] **Mack Hill, W.** Frattini Subgroups and Supernilpotent Groups. Israel, J. of Math. Vol. 26, nº 1 (1977).

[7] **Martín Salvador, P.** Sobre los subgrupos Frattini relativos a automorfos y las relaciones entre ellos. VIII Jorn. Mat. Luso-Esp., Vol.I., 143-151, Coimbra (1981).

[8] **Schmid, P.** Nilpotente Gruppen und Stabilitätsgruppen, Math. Ann. 202, 57-59 (1973).

Rebut el 27 d'abril de 1982

Pilar Martín Salvador
Departament d'Algebra i Fonaments
Facultat de Matemàtiques
Universitat de València
Burjassot (València)
ESPANYA