Pub. Mat. UAB
Vol. 27 Nº 2 Juny 1983

ALGEBRA DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS SOBRE EL DISCO PROLONGABLES POR CONTINUIDAD JUNTO CON SUS DERIVADAS EN UN PUNTO SEGUN COMPACTOS NO TANGENCIALES

Joaquín Mª Ortega Aramburu

Abstract: We characterize the closed ideals of the locally convex algebra of analytic functions in the unit disc whose derivatives have a nontangential limit in a point of the boundary. A theorem about spectral synthesis in this algebra is also proved. This paper completes the previous work (4) of the author.

Introducción: Sea D el disco unidad $|z|<1$. Consideremos K_r el compacto limitado por las dos tangentes trazadas desde $z=-1$ a la circunferencia $|z|=r<1$ junto con el arco en $|z|=r$ limitado por las mismas y a distancia mayor de $z=-1$. Sea por otra parte $\mathcal{D}_\alpha$ $0<\alpha<1$ la imagen de D por la aplicación $\omega=(z+1)^\alpha-1$ (determinación principal de la misma, es decir, con la imagen $\mathcal{D}_\alpha$ contenida en D).

Consideremos el álgebra A de las funciones holomorfas en D y que se extienden por continuidad así como todas sus derivadas a $z=-1$ según los compactos K_r. Coincide con la obtenida sustituyendo los K_r por los compactos $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$. También coincide con el álgebra de las funciones que admiten desarrollo asintótico en $z=-1$ según los compactos K_r (2).

El álgebra A se puede identificar con $\varprojlim A^\infty(K_r)$ donde $A^\infty(K_r)$ es el álgebra de las funciones holomorfas en K_r y prolongables por continuidad junto con sus derivadas a K_r (análogamente con $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$). A tiene entonces estructura de álgebra m.l.c. de Fréchet y su topología es la de la convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas sobre las K_r (o $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$).

El espectro del álgebra puede identificarse con $D \cup \{p\}$ con su topología natural.

Es conocida (1) la descripción en términos de funciones holomorfas, o mejor en términos de gérmenes de funciones holomorfas en el ∞, del dual topológico de A. Así si $T \in A'$ y es prolongable a un elemento $T^e \in A^\infty(K_r)'$ se define la función indicatriz $i_T(\omega) = T^e(\frac{1}{\omega - z})$, definida en $\complement K_r$. Puede recuperarse T a partir de i_T por medio de la igualdad

$T(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} i_T(\omega)\, p(\omega)\, d\omega$; donde ℓ es una curva simple cerrada, diferenciable a trozos, contenida en $\complement K_r$ y que rodea a K_r ; p polinomio (que son densos en A).

El propósito de este trabajo es dar un teorema de estructura de todos los ideales de A y como consecuencia probar un teorema de síntesis espectral para los mismos. Se observa que, a diferencia de lo que ocurre con el álgebra de las funciones holomorfas en D que se prolongan por continuidad junto con sus derivadas según discos tangentes a D (4), en el presente teorema de estructura no aparecen los factores singulares interiores.

Veamos en primer lugar como la factorización de las restricciones de los elementos de A a cada $\mathcal{D}_\alpha$ da una factorización canónica en que no aparecen factores singulares.

Teorema 1: Sea ϕ una representación conforme de D en un dominio $\mathcal{D} \subset D$ que es el dominio interior limitado por una curva de Jordan rectificable. Sea ϕ extendido por continuidad a $\bar{D}$ y si $\Gamma = \{z ; |z| = 1\}$ supongamos que $\bar{\mathcal{D}} \cap \Gamma$ y $\phi^{-1}(\mathcal{D} \cap \Gamma)$ tienen medida cero en Γ. Entonces si f es del álgebra del disco y función exterior, se verifica que $f \circ \phi$ es también exterior en D.

En efecto, es suficiente probar que:

$$\log|f(\phi(0))| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(\phi(e^{iu}))|du$$

Ahora bien, para casi todo $u \epsilon \Gamma$ se verifica $\phi(e^{iu}) \epsilon D$ y por ser f exterior se tiene:

$$\log|f(\phi(e^{iu}))| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+\phi(e^{iu})}{e^{it}-\phi(e^{iu})} \log|f(e^{it})|dt$$

Tenemos entonces que calcular:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\frac{e^{it}+\phi(e^{iu})}{e^{it}-\phi(e^{iu})} \log|f(e^{it})|dt$$

puesto que para todo t y c.p.t u $\operatorname{Re}\dfrac{e^{it}+\phi(e^{iu})}{e^{it}-\phi(e^{iu})} \geqslant 0$, podemos aplicar el teorema de Fubini ya que

$$\frac{1}{2\pi}\int \operatorname{Re}\frac{e^{it}+\phi(e^{iu})}{e^{it}-\phi(e^{iu})}\,du = \operatorname{Re}\frac{e^{it}+\phi(0)}{e^{it}-\phi(0)}$$

para todo t con $e^{it} \notin \bar{\mathcal{D}} \cap \Gamma$, es decir, c.p.t. t ; pues es suficiente aplicar el teorema de la media a las funciones:

$$\frac{e^{it}+\phi(rz)}{e^{it}-\phi(rz)} \qquad r<1$$

y verificar que, puesto que

$$\left|\frac{e^{it}+\phi(rz)}{e^{it}-\phi(rz)}\right| \leqslant K \quad \text{para} \quad |z| \leqslant 1 \quad r \leqslant 1$$

podemos pasar al límite bajo el signo integral.

Calculando entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,\frac{e^{it}+\phi(0)}{e^{it}-\phi(0)}\,\log|f(e^{it})|\,dt = \log|f(\phi(0))|$$

pues f es exterior en D, hemos terminado.
Obsérvese que la condición del teorema depende del dominio $\mathcal{D}$ y no de la particular representación conforme.

Corolario 1: Sean $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ dominios acotados limitados por curvas de Jordan rectificables Γ_1, Γ_2. Sean ϕ_1, ϕ_2 representaciones conformes de D en $\mathcal{D}_1$ y en $\mathcal{D}_2$ respectivamente. Sea $f:\bar{\mathcal{D}}_2 \longrightarrow C$ continua con $f\circ\phi_2$ exterior y supongamos que $\bar{\mathcal{D}}_1 \cap \Gamma_2$ y $\phi^{-1}(\bar{\mathcal{D}}_1 \cap \Gamma_2)$ sean de medida cero en Γ_2 y en Γ respectivamente; entonces $f\circ\phi_1$ es exterior.
En efecto, basta considerar el terema 1 aplicado a $f\circ\phi_2$ y al dominio $\mathcal{D} = \phi_2^{-1}\circ\phi_1(D) = \phi_2^{-1}(\mathcal{D}_1)$ que verifica que $\bar{\mathcal{D}} \cap \Gamma = \phi_2^{-1}(\bar{\mathcal{D}}_1 \cap \Gamma_2)$ es de medida 0 en el borde de Γ y $\phi_1^{-1}\circ\phi_2(\bar{\mathcal{D}} \cap \Gamma) = \phi_1^{-1}(\bar{\mathcal{D}}_1 \cap \Gamma_2)$ lo es en Γ. De hecho hemos identificado mediante ϕ_2 $\bar{D}$ con $\bar{\mathcal{D}}_2$.

Corolario 2: Sea $f = (f_\alpha)\varepsilon A = \varprojlim A^{\infty}(\mathcal{D}_\alpha)$. Si f_{α_1} es exterior para un $\mathcal{D}_{\alpha_1}$, lo es f_{α_2} para cada $\mathcal{D}_{\alpha_2} \subset \mathcal{D}_{\alpha_1}$. Análogo enunciado para los K_r. También puede pasarse de un K_{r_1} a un $\mathcal{D}_\alpha$ si $K_{r_1} \supset \mathcal{D}_\alpha$ y la intersección de sus fronteras es $\{-1\}$.

Teorema 2: Sea $0<\beta<\alpha<1$ y consideremos una función singular en $\mathcal{D}_\alpha$ correspondiente a $e^{\lambda\frac{-1+z}{1+z}}$, $\lambda \geqslant 0$ en D respecto a la representación conforme $\omega = (z+1)^{\alpha}-1$; es decir $f(\omega) = e^{\lambda\frac{-2+(\omega+1)^{1/\alpha}}{(\omega+1)^{1/\alpha}}}$. Entonces la función $f\circ\phi_\beta$ es exterior.
En efecto, hemos de verificar que la función en D:

$$g(z) = f((z+1)^{\beta}-1) = e^{\lambda\frac{-2+(z+1)^{\beta/\alpha}}{(z+1)^{\beta/\alpha}}} = e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda\frac{2}{(z+1)^{\beta/\alpha}}} =$$

$$= e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda\frac{2}{(z+1)^{\gamma}}},\quad 0<\gamma<1\text{ , es exterior.}$$

Se tiene que $\log\left|\frac{g(0)}{e^{\lambda}}\right| = -2\lambda$. Calculemos ahora $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,\frac{-2}{(e^{it}+1)^{\gamma}}\,dt$.

Observemos que $-2\lambda \operatorname{Re} \dfrac{1}{(e^{it}+1)^{\gamma}} = -2^{1-\gamma}\cdot \lambda \dfrac{\cos \gamma \frac{t}{2}}{\cos^{\gamma} \frac{t}{2}}$ que es integrable.

Llamemos Γ_ε al arco obtenido suprimiendo de Γ el arco contenido en el disco de centro $z=-1$ y radio ε y por γ_ε el arco del círculo centrado en -1 y radio ε que está contenido en D. Podemos calcular por residuos:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon} \frac{-2\lambda}{(z+1)^{\gamma} z}\, dz = 2\pi i(-2\lambda)$$

Por otra parte la integral sobre γ_ε cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ tiende hacia cero ya que $\dfrac{-2\lambda(z+1)}{(z+1)^{\gamma} z} \underset{z\to 1}{\longrightarrow} 0$ uniformemente en γ_ε. De aquí que nuestra integral queda

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{-2\lambda}{(e^{it}+1)^{\gamma}}\, dt = 2\pi(-2\lambda) \quad \text{como queríamos probar.}$$

<u>Teorema 3</u>: Sea $\phi: D \longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \subset D$ la representación $\omega = \phi(z) = (z+1)^{\alpha} - 1$ y sea $f(z)$ un producto de Blaske correspondiente a un conjunto Q_1 de ceros $\{\alpha_n\}$ pertenecientes a D. Entonces $f\circ\phi$ da una factorización en D en un producto de Blaske por una función exterior.

En efecto, sea $f(z) = \prod_{\alpha_n \in Q_1} \dfrac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z} \dfrac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$

$f\circ\phi(z) = \prod_{\alpha_n \in Q_1} \dfrac{\alpha_n - \phi(z)}{1-\bar{\alpha}_n \phi(z)} \dfrac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$ y sean $\alpha_n = \phi(\beta_n)$, para $\alpha_n \in \mathcal{D}_\alpha$. Llamemos $Q_2 = Q_1 \cap \mathcal{D}_\alpha$ y consideremos el correspondiente producto de Blaske:

$$g(z) = \prod_{\alpha_n \in Q_2} \frac{\beta_n - z}{1-\bar{\beta}_n z} \frac{|\beta_n|}{\beta_n}$$

Hemos de probar que $f\circ\phi(z)/g(z)$ es exterior. Se trata de verificar que

$$\log\left|\frac{f(\phi(0))}{g(0)}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{f(\phi(e^{it}))}{g(e^{it})}\right| dt$$

Calculemos, entonces, esta última integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{\alpha_n \in Q_2} \log \left| \frac{\dfrac{\alpha_n - \phi(e^{it})}{1-\bar{\alpha}_n \phi(e^{it})}}{\dfrac{\beta_n - e^{it}}{1-\bar{\beta}_n e^{it}}} \right| + \sum_{\alpha_n \in Q_1 \sim Q_2} \log\left| \frac{\alpha_n - \phi(e^{it})}{1-\bar{\alpha}_n \phi(e^{it})} \right| \right\} dt$$

Obsérvese que $\left|\dfrac{\alpha_n-\phi(e^{it})}{1-\bar{\alpha}_n\phi(e^{it})}\right|<1$ c.p.t. t así como que:

$$\left|\frac{\alpha_n-\phi(e^{it})}{1-\bar{\alpha}_n\phi(e^{it})}\right| \Big/ \left|\frac{\beta_n-e^{it}}{1-\bar{\beta}_n e^{it}}\right| < 1 .$$

Ahora bien:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{\dfrac{\alpha_n-\phi(e^{it})}{1-\bar{\alpha}_n\phi(e^{it})}}{\dfrac{\beta_n-e^{it}}{1-\bar{\beta}_n e^{it}}}\right| dt = \lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{\alpha_n-\phi(re^{it})}{1-\bar{\alpha}_n\phi(re^{it})} \Big/ \frac{\beta_n-re^{it}}{1-\bar{\beta}_n re^{it}}\right| dt =$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \log\left|\frac{\alpha_n-\phi(0)}{1-\bar{\alpha}_n\phi(0)} \Big/ \frac{\beta_n-0}{1-\bar{\beta}_n 0}\right|$$

donde esta última igualdad se deduce del teorema de la media.

Para los sumandos en que $\alpha_n \varepsilon Q_1 \sim Q_2$ y $\alpha_n \notin \bar{\mathcal{D}}_\alpha$ los argumentos se repiten y la integral queda $\log\left|\dfrac{\alpha_n-\phi(0)}{1-\bar{\alpha}_n\phi(0)}\right|$.

Para el caso en que α_n pertenezca a la frontera de $\mathcal{D}_\alpha$ como en los casos anteriores $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1-\bar{\alpha}_n\phi(e^{it})|dt = \log|1-\bar{\alpha}_n\phi(0)|$.

Es suficiente comprobar que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\alpha_n-\phi(e^{it})|dt = \log|\alpha_n-\phi(0)| \quad \text{para} \quad \alpha_n=\phi(e^{it_0})$$

Se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\phi(e^{it_0})-\phi(e^{it})|dt = \log|\alpha_n-\phi(0)| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|1-\frac{\phi(e^{it})-\phi(0)}{\phi(e^{it})-\phi(0)}\right| dt$$

Veamos que esta última integral es nula. Sea Γ_ε el arco de Γ exterior al disco de centro e^{it_0} y radio ε . Completemos Γ_ε con un arco γ_ε del círculo de centro e^{it_0} y radio ε y contenido en D .

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon} \log\left(1-\frac{(z+1)^\alpha-1}{\alpha_n}\right)\frac{dz}{z} = 0$$

Por otra parte el límite de la integral sobre γ_ε cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ es cero ya que

$$|\varepsilon e^{it} + e^{it_0} - e^{it_0}|^k \log\left| 1 - \frac{(e^{it} + e^{it_0} + 1)^\alpha - 1}{\alpha_n}\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon^k (\log|(e^{it_0} + 1)^\alpha - (e^{it_0} + 1 + \varepsilon e^{it})^\alpha|| + |\log|\alpha_n||) \leq$$

$$\leq \varepsilon^k \log K\varepsilon + \varepsilon^k \lim |\alpha_n| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Obsérvese que este argumento puede repetirse para ϕ cualquiera que sea prolongable a una función holomorfa en un entorno de cada β_n con $\phi'(\beta_n) \neq 0$. El teorema 3 puede entonces darse sustituyendo $\mathcal{D}_\alpha$ por un $\mathcal{D}$ tal que $\phi^{-1}(\bar{\mathcal{D}} \cap \bar{D})$ sea de medida cero en V para que $\left|\frac{\alpha_n - \phi(e^{it})}{1 - \bar{\alpha}_n \phi(e^{it})}\right|$ sea menor que 1 c.p.t. t y que la función ϕ se prolongue a una función holomorfa en un entorno de cada β_n como antes hemos considerado.

<u>Teorema 4</u>: Sea $f = (f_\alpha) \in A = \varprojlim A^\infty(\mathcal{D}_\alpha)$. La factorización de cada $f_\alpha \circ \phi_\alpha$ es de la forma producto de Blaske por una función exterior.

En efecto sea $f \in A$ y α tal que $f_\alpha \circ \phi_\alpha$ tenga como único posible cero en $|z| = 1$ el $z = -1$. Es conocido (lema 6 de (3)) que en la factorización canónica de $f_\alpha \circ \phi_\alpha$ la parte singular tiene una medida asociada con soporte contenido en los ceros de $f_\alpha \circ \phi_\alpha$, es decir, es del tipo $e^{\lambda \frac{-1+z}{1+z}}$, $\lambda \geq 0$. Aplicando ahora el corolario 2, teorema 2 y teorema 3 se tendrá que $f_\beta \circ \phi_\beta$ para $\beta < \alpha$ tiene una factorización canónica en que no aparece ningún factor singular. Este razonamiento puede aplicarse para cada β con $0 < \beta < 1$.

Estamos ya en condiciones de establecer el teorema de estructura de los ideales cerrados de A . Para $f \in A$ denotamos $Z^n(f) = \{z \in D \cup \{1\} ; f(z) = \ldots$ $\ldots = f^n(z) = 0\}$. Si I es un ideal de A , $Z^n(I) = \bigcap_{f \in I} Z^n(f)$; $Z^\infty(I) = \bigcap Z^n(I)$. Llamemos $I(Z(I))$ al conjunto de los $f \in A$ tales que para cada $n = 0, 1, \ldots, \infty$, $Z^n(f) \supset Z^n(I)$.

<u>Teorema 5</u>: Sea I un ideal cerrado de A . Se verifica $I = I(Z(I))$.

En efecto, si $I_0 = I(Z(I))$ tenemos $I \subset I_0$ y llamemos $J = \{f \in A; f\, I_0 \subset I\}$. J es un ideal cerrado de A que contiene a I . Por otra parte se cumple que $Z^0(J) \subset Z^\infty(I)$. En efecto, si a perteneciera a $Z^n(I)$ pero no a a $Z^{n+1}(I)$ existiría $f\varepsilon I$ con $a\varepsilon Z^n(f) - Z^{n+1}(f)$; $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \varepsilon A$ y si $h\varepsilon I_0$ y $h(z) = (z-a)^{n+1}H(z)$ con $H(z)\varepsilon A$ se tiene $gh = fH\varepsilon I$, luego $g\varepsilon J$ y $g(a) \neq 0$. Tendremos entonces que o bien $Z^0(J) = \phi$ en cuyo caso $J = A$ y por tanto $I = I_0$ o bien $Z^0(J) = Z^\infty(I) = \{-1\}$. Consideremos este último caso. Precisamos ahora del siguiente lema:

<u>Lema</u>: Existen funciones exteriores $F_k \varepsilon A^\infty(D)$ $k = 1,2,\ldots$ tales que $Z^0(F_k) = Z^\infty(F_k) = \{-1\}$ y tal que si $h\varepsilon A$ con $Z^\infty(h) = \{-1\}$ entonces $\{F_k h\} \longrightarrow h$ en A .

Puede darse una demostración análoga a la del lema 4 de (4) que a su vez se deduce del teorema 3.3 de (5).

El teorema quedará probado si demostramos que los F_k pertenecen a J ; pues en este caso si $h\varepsilon I_0$, $F_k h \longrightarrow h$ y si $F_k h\varepsilon I$ tendremos que $h\varepsilon I$ y habremos terminado.

Para ver que las F_k pertenecen a J basta ver que son incidentes a las $T\varepsilon J^\perp \subset A'$.

Sea $T\varepsilon J^\perp \subset A'$ supongamos sea continua respecto a la convergencia uniforme de las funciones y derivadas hasta el orden n-simo sobre K_r . Es conocido que sobre los polinomios $T(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\ell i_T(\omega)\, p(\omega)\, d\omega$ donde ℓ es una curva contenida en $\complement K_r$, diferenciable a trozos y que rodea K_r . Tomando $K_r \subset K_{r_1} \subset \mathcal{D}_\alpha$ puede tomarse como curva ℓ la unión de un arco del borde de $\mathcal{D}_\alpha$ exterior a un disco de centro -1 y radio ε junto con un arco de la circunferencia centrada en -1 y radio ε exterior a $\mathcal{D}_\alpha$.

Ahora bien si $f\varepsilon A$ con $Z^\infty(f) = \{-1\}$, $f(z) = (z+1)^{n+2}g(z)$ con $g(z)\varepsilon A$. Por otro lado $g(z) = \lim p_n(z)$ en A , p_n polinomios en z y tendremos

$$T(p_n(z)(z+1)^{n+2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_\alpha} i_T(\omega) p_n(\omega)(\omega+1)^{n+2} d\omega$$

De la acotación (1) de $i_T(\omega)\, p_n(\omega)(\omega+1)^{n+2}$ puede pasarse al límite bajo el signo integral y tendremos que la expresión:

$$T(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}_\alpha} i_T(\omega) f(\omega) d\omega \quad \text{es válida para } f\varepsilon A \text{ con } Z^\infty(f) = \{-1\}$$

Se trata entonces de ver que

$$\int_{\partial \mathcal{D}_\alpha} i_T(\omega) F_k(\omega) d\omega = 0$$

Ahora bien la anterior integral es igual a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} i_T(\phi(e^{it}))F_k(\phi(e^{it}))\cdot\phi'(e^{it})\cdot ie^{it}dt$$

para $\phi(z) = (z+1)^{\alpha} - 1$, luego $\phi'(z) = \alpha(z+1)^{\alpha-1}$.

Obsérvese que la función $i_T(\phi(e^{it}))F_k(\phi(e^{it}))\cdot\phi'(e^{it})\cdot ie^{it}$ extendida por continuidad dando el valor 0 en $z=-1$ es una función continua en . Consideremos el subespacio de H^2 de los elementos del tipo $p(z)\cdot f\circ\phi$ para $f\varepsilon J$, p polinomio en z . Es un subespacio invariante de H^2 por el producto por z . Su adherencia en H^2 es por el teorema de Beurling $S\cdot H^2$ con S interior. Ahora bien por ser $Z^0(J)=\{-1\}$ y los elementos $f\circ\phi$ con $f\varepsilon J$ no tener factores singulares se sigue que $S=1$ y, por tanto, existen $f_n\varepsilon J$, $p_n(z)$ polinomios en z tales que:

$$\|p_n(z)\cdot f_n\circ\phi(z) - 1\|_2 \longrightarrow 0$$

Por otra parte, las funciones $p_n\circ\phi^{-1}$ son continuas en $\bar{\mathcal{D}}_\alpha$ y holomorfas en su interior, luego existe (teorema de Mergelyan por ejemplo) una sucesión de polinomios q_n tales que:

$$\sup_{\omega\varepsilon\bar{\mathcal{D}}_\alpha} |q_n(\omega) - p_n\circ\phi^{-1}(\omega)| < \frac{\varepsilon_n}{\|f_n\|_{\infty,\mathcal{D}_\alpha}}\ , \text{ con } \ \varepsilon_n\longrightarrow 0$$

o lo que es equivalente

$$\sup_{z\varepsilon\bar{D}} |q_n\circ\phi(z) - p_n(z)| \cdot \|f_n\circ\phi\|_{\infty,\bar{D}} \longrightarrow 0$$

De aquí que:

$$\|q_n\circ\phi\cdot f_n\circ\phi - 1\|_2 < \|q_n\circ\phi\cdot f_n\circ\phi - p_n\cdot f_n\circ\phi\|_2 + \|p_n\cdot f_n\circ\phi - 1\|_2 \leq$$

$$\leq C\,\|q_n\circ\phi\cdot f_n\circ\phi - p_n\cdot f_n\circ\phi\|_{\infty,\bar{D}} + \|p_n\cdot f_n\circ\phi - 1\|_2 \longrightarrow 0$$

Tendremos entonces que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} i_T(\phi(e^{it}))F_k(\phi(e^{it}))\cdot\phi'(e^{it})\cdot i\cdot e^{it}dt =$$

$$= \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} i_T(\phi(e^{it}))F_k(\phi(e^{it}))\cdot\phi'(e^{it})\cdot i\cdot e^{it}\cdot q_n(\phi(e^{it}))\cdot$$

$$\cdot f_n(\phi(e^{it}))dt = \lim_n \int_{\partial\mathcal{D}_\alpha} i_T(z)F_k(z)q_n(z)f_n(z)dz$$

pero $q_n\cdot f_n\cdot F_k\,\varepsilon\,J$ y por tanto la integral es 0 y el límite también será cero como queríamos probar.

Corolario 3 (síntesis espectral en A): Todo ideal cerrado de A es intersección de primarios cerrados.

En efecto $I = \bigcap p_{\alpha_n}$, donde α_n recorre los ceros de I y p_{α_n} es el ideal primario cerrado de los f de A tales que en α_n tienen un cero de multiplicidad la que tenía I.

Referencias:

1) J.A. Mira - Espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. Tesis doctoral. Alicante, 1979.

2) C. Herrero - Espacios de funciones holomorfas cuyas derivadas se extienden por continuidad en un punto de la frontera del dominio y su relación con los espacios de funciones holomorfas con desarrollo asintótico. Tesis doctoral. Alicante, 1979.

3) W. Rudin - The closed ideals in an algebra of analytic functions. Canad. J. Math., 9 (1957), 426-434.

4) J.M. Ortega - Algebra de funciones holomorfas en el disco prolongables junto con sus derivadas a un punto de la frontera. Comunicación VIII Jornadas Luso-Españolas de Matemática. 1981.

5) B.A. Taylor and D.L. Williams - Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values. Canad. J. Math., Vol. XXII, n° 6 , (1970), 1266-1283.

Rebut el 5 d'abril del 1982

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Bellaterra - Barcelona
ESPANYA