Pub. Mat. UAB
N° 25, Juny 1981

ESTUDIO DE ALGUNOS PROBLEMAS EN ALGEBRAS DE FUNCIONES LIPSCHITZIANAS

Miguel Carlos Muñoz Lecanda

Sección de Matemáticas

Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra

Barcelona, España

Rebut l'1 d'octubre del 1980.

ABSTRAC: In the first chapter we study the Banach algebra of functions defined on a compact metric space with values in a Banach algebra and we characterize its spectrum. The main result is: Let (K,d) be a compact metric space, A a commutative unitary C*-algebra. If $D \subset K$ and $f: D \to A$ is a bounded lipschitzian function on D, then there exists a Lipschitz extension of f to all K.

The second chapter is the study of the algebra D(m) of C^m-class functions on a compact subset K of R^n whose partial m-derivatives verify a Lipschitz condition. It is shown that spectral synthesis is verified in D(m) for closed ideals. For this we offer first a characterization of the minimal closed ideal of a point and we also study the primary ideals of D(m) and their relations with the derivations of order m on D(m).

INTRODUCCION

La memoria que aquí se presenta trata de algunos problemas en álgebras de funciones que cumplen una condición de Lipschitz.

Está dividida en dos capítulos y cada uno de ellos trata de problemas distintos.

En el capítulo primero se estudia un problema de extensión de funciones, conservando una condición de Lipschitz, para funciones a valores en una C*-álgebra.

En el capítulo segundo se hace una descripción completa del álgebra de funciones de clase C^m sobre un compacto K de R^n tales que sus derivadas m-simas cumplan una condición de Lipschitz. Se caracteriza el ideal de nulidades en un punto de K, se estudian los ideales primarios, las derivaciones de orden $m + 1$ y su relación con los ideales primarios asociados a un ideal cerrado y finalmente se demuestra un teorema de síntesis espectral y se aplica a caracterizar el ideal de nulidades de un cerrado de K.

Cada uno de los capítulos va precedido de una introducción que plantea con precisión el problema que en él se trata, sus antecedentes y los resultados que se obtienen. Los capítulos están divididos en secciones, todas ellas empiezan con un breve comentario sobre los resultados de la misma; así pues para más detalles, véanse esos comentarios e introducciones.

Sólo me queda agradecer al Prof. Dr. Julià Cufí, Director de este trabajo, la ayuda y apoyo prestado en todo momento para poder realizar esta memoria. Además sus observaciones a la primera redacción han permitido mejorar algunos aspectos de la misma.

Al Prof. Dr. Joaquín Ortega tengo que agradecer el haberme introducido en el tema y haber estado siempre dispuesto a hablar de él. A él, junto con otros, debo mi interés por algunos problemas del análisis y haber podido trabajar en ellos.

Finalmente es para mi obligado agradecer la colaboración y el compañerismo de todos los componentes durante estos años de la Sección de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, en particular a Amparo López y Sebastián Xambó, con quienes he hablado muchas veces de problemas matemáticos, y de otros, y a Joaquim Bruna que siempre se ha interesado por los problemas que he abordado.

Quisiera dedicar estas páginas a mi Madre y a mi Mujer que siempre han confiado en que las escribiría.

Esta memoria es la tesis doctoral presentada por el autor en la Universidad Autónoma de Barcelona. Algunos de los resultados de la misma aparecerán por separado en otras publicaciones.

Bellaterra, a 23 de Mayo de 1980.

INDICE

CAPITULO I

Un problema de extensión para funciones que cumplen una condición de Lipschitz.

I.0.- Introducción.
I.1.- El álgebra Lip(X,A).
I.2.- Estudio del espectro.
I.3.- Teorema de representación y consecuencias.

CAPITULO 2

Estudio de un álgebra de funciones con derivadas m-simas de Lipschitz.

II.0.- Introducción.
II.1.- Notaciones.
II.2.- El álgebra D(m). Primeras propiedades. Funciones planas en un punto.
II.3.- Ideales primarios en D(m).
II.4.- Derivaciones e ideales primarios asociados.
II.5.- Síntesis espectral en D(m) y consecuencias.

I.0.- INTRODUCCION

Parece ser que, aproximadamente en 1923, S. Banach descubrió que una función real definida en conjunto de números reales, que sea acotada y verifique una condición de Lipschitz en ese conjunto, se puede extender a todos los números reales, manteniendo la cota y verificando la misma condición de Lipschitz. Nunca he encontrado la referencia exacta de este resultado que se suele llamar Teorema de extensión de Banach para funciones de Lipschitz, pero sí son conocidos resultados posteriores en esa misma linea.

Normalmente, cada resultado posterior utiliza en la demostración los mismos procedimientos que Banach para construir la extensión o se apoya en el resultado de Banach para obtener resultados que se pueden aplicar en condiciones más generales.

En principio hay dos posibilidades de generalizar el resultado. La primera consiste en ampliar el espacio en que está definida la función. Esta generalización se hizo inmediatamente, ya que el método de Banach no utilizaba propiedades esenciales de los números reales y era aplicable a todo espacio métrico.

La segunda es generalizar el espacio en el que la función tome valores. Es inmediato hacerlo en el caso en que la función toma valores en un espacio vectorial finito sobre R ó C. El problema es estudiar el caso en que la función tome valores en un espacio de Banach en general, o por lo menos en algunos casos particulares.

Voy a intentar hacer una breve relación cronológica de los resultados en este campo. Los trabajos que creo más representativos son los siguientes:

1934, McShane (1)

Teorema 1: Sea f una función real definida en un subconjunto E de un espacio métrico (S,d), que satisface la condición de Lipschitz:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq Md(x_1,x_2)$$

sobre E. Entonces f se puede extender a todo S conservando la misma condición de Lipschitz.

Teorema 2: Sea f una función real definida en un subconjunto E de un espacio métrico (S,d), tal que f admita un módulo de continuidad w cóncavo para $t \geq 0$ y que se acerca a cero con t, entonces f se puede extender a todo S conservando a w como módulo de continuidad. (Recordamos que un módulo de continuidad para una función f es una función $w:(-t,t) \to R$ definida en un entorno de cero de R tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq w(d(x,y)) \quad \text{para } d(x,y) < t)$$

Obsérvese que es una mera extensión del resultado de Banach a un espacio métrico cualquiera. Sin embargo se obtienen consecuencias como: Una función contínua en un conjunto cerrado de R^n extiende a una función continua en R^n. Este resultado para las funciones continuas ya había sido obtenido por Whitney unos meses antes y con métodos semejantes. Para más detalles véase Whitney (1).

1943, Valentine (1)

Teorema 4: Sea S un subconjunto de R^2 y sea $f: S \to R^2$ una función que verifica

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$$

cuando x e y son de S.

Si T es un subconjunto de R^2 que contiene a S, f se puede extender a T preservandose la condición de Lipschitz. La extensión se puede hacer de forma tal que el conjunto imagen de la función extendida esté contenido en un conjunto convexo fijado previamente, con la condición de que contenga a la imagen de f.

Este es el primer intento, y el único que yo conozca, en el que se intenta decir algo sobre la extensión o sobre su imagen.

1955, Czipszer y Geher (1)

Teorema 1: Sea X un espacio métrico y S un subconjunto de X. Sea f una función real definida en S que satisface la condición de Lipschitz:

$$|f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y)$$

para todo x,y de S. Entonces existe una función $F:X \to R$ que coincide con f sobre S y que verifica la misma condición de Lipschitz sobre todo X.

Teorema 2: Sea X un espacio métrico y S un subconjunto de X. Si $f:S \to R$ verifica para cada x de S la condición:

$$|f(x) - f(y)| \leq Kd(x,y) \qquad \text{para } d(x,y) < \delta$$

con $K \geq 0$, y, $\delta > 0$, dependiendo K y δ del punto x. Entonces existe una función $F:X \to R$ que coincide con f sobre S y que verifica esa misma condición para todo x de X.

1966, Schonbeck (1)

Teorema 1: Sean E y F espacios de Banach reales o complejos. Si para todo subconjunto D de E y toda contracción $T:D \to F$, existe una contracción $T':E \to F$ que es una extensión de T, entonces E y F son espacios de Hilbert.

Corolario: No existe ningún espacio de Banach complejo F tal que para todo espacio de Banach complejo E, dada una parte D de E y una contracción $T:D \to F$, entonces T extienda a una contracción $T:E \to F$.

Los resultados de Schönbeck son los primeros en los que aparece un intento de extender funciones a valores en un espacio de dimensión no finita y respetando una condición de Lipschitz, aunque sólo estudia los casos de contracciones. Un análisis de sus resultados nos lleva a que no es posible resolver el problema completamente ya que hay que hacer restricciones sobre los espacios en los que está definida y toma valores la función.

1970, Minty (1)

Teorema: Sea H un espacio de Hilbert, M un espacio métrico, D una parte de M. Sea $f:D \to H$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq (d(x,y))^{\alpha} \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

Entonces existe una extensión de f a todo M conservándose esa condición si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

1.- $\alpha \leq 1/2$

2.- M es un espacio vectorial dotado de un producto escalar con distancia dada por $k^{1/\alpha}\|x-y\|$, en donde $k > 0$.

Además la extensión se puede hacer en forma tal que la imagen de la extensión esté en el cierre convexo de la imagen de f.

Minty hace observar expresamente la falta de resultados acerca del problema de extender funciones lipschitzianas a valores en espacios de dimensión infinita.

1974, Flett (1)

Teorema: Sean E y F espacios normados reales y sea D un subconjunto de E que sea acotado, cerrado y convexo, con diametro ρ y que contenga una bolsa cerrada con diámetro $\delta > 0$ y centro x_0. Sea $f:D \to F$ una función que verifica la condición de Lipschitz:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x-y\| \qquad \text{en } D.$$

En esas condiciones, f se extiende a una función $g:E \to F$ que verifica en todo E la condición:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq (K\rho/\delta)\ \|x-y\|$$

El resultado y los métodos de Flett son distintos de los de los anteriores. En realidad estudia las condiciones que ha de cumplir el subconjunto D de E para que una función lipschitziana f de D en F se extienda a una función $g:E \to F$ conservando la condición de Lipschitz. Reduce el problema a tomar exclusivamente subconjunto D de E tales que exista una aplicación lipschitziana $h:E \to D$ tal que sea la identidad sobre D y que $h^2 = h$. Es decir, Flett no aborda el problema de la extensión sino el de buscar buenos subconjuntos para poder hacerla

Hay otros resultados sobre el problema que se pueden encontrar en las referencias que se dan en los artículos citados.

Dentro de estos resultados se plantea el siguiente problema:¿En que condiciones es válido el teorema de extensión para funciones a valores en un álgebra de Banach?. En esta situación, las funciones definidas en un espacio métrico (X,d) a valores en un álgebra de Banach A, forman una nueva álgebra de Banach. Denominaremos Lip(X,A) al álgebra de Banach de las funciones definidas en el espacio métrico (X,d) a valores en el álgebra de Banach A y que cumplan una condición de Lipschitz en X. Al estudiar la estructura multiplicativa de ese álgebra obtenemos resultados en el siguiente sentido.

En primer lugar, la representación de Guelfand permite tratar a los elementos de Lip(X,A) como funciones continuas en el espectro maximal y valoradas en los números complejos.

En segundo lugar, los resultados de Sherbert (2) permiten interpretar a los elementos de Lip(X,A) como funciones de Lipschitz definidas en el espectro maximal, dotado de una distancia conveniente, y a valores en los números complejos.

Con estos precedentes y los resultados sobre extensión de funciones a valores en los números complejos probamos lo siguiente: Sea A una C*-álgebra conmutativa y unitaria y sea (K,d) un espacio métrico compacto con distancia d. Sea D un subconjunto de K y $f:D \to A$ una función acotada que verifique la condición de Lipschitz

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda d(x,y)$$

para toda pareja x,y de D. En esas condiciones existe una función F del álgebra Lip(K,A) tal que restringida a D coincide con f.

El método utilizado es distinto de los anteriores, pues como ya se ha dicho, nos basamos en la estructura multiplicativa de Lip(K,A). En primer lugar, describimos las propiedades esenciales de ese álgebra de Banach y caracterizamos y estudiamos su espectro maximal y la regularidad del álgebra. En segundo lugar, interpretamos, mediante las representaciones de Guelfand y Sherbert, sus elementos como funciones a valores complejos que son lipschitzianas y en el caso de que A tenga suficientes propiedades construímos la extensión.

En todo momento que haga falta, y sin citar expresamente su procedencia, utilizaremos los resultados de Sherbert (1) y (2) sobre el álgebra Lip(X,C), en particular que es regular.

I.1.- El álgebra Lip (X,A).

I.1.0.- En este apartado damos las definiciones previas a todo el problema, construimos el álgebra de funciones con la que vamos a tratar y deducimos las primeras propiedades de este álgebra. Algunos de esos resultados se usarán posteriormente, otros son generalización de resultados ya conocidos en el caso de funciones de Lipschitz a valores en los números complejos.

I.1.1.- Definiciones

Sea A un álgebra de Banach conmutativa y con unidad, (X,d) un espacio métrico con distancia d. Consideramos las funciones $f:X \to A$, acotadas, tales que para cada una de ellas existe un número real $\lambda > 0$ tal que:

I.1.2.- $$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda d(x,y)$$

para toda pareja x, y de puntos de X.

Para una de esas funciones f llamamos:

$$\|f\|_0 = \sup\{\|f(x)\| \,; x \in X\}$$

$$\|f\|_d = \sup\{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)} \,; x,y \in X,\ x \neq y\}$$

$$\|f\| = \|f\|_0 + \|f\|_d$$

I.1.3.- Proposición

Sea Lip(X,A) el conjunto de tales funciones. Lip(X,A) con la suma y el producto naturales y la norma $\| \ \|$ es un álgebra de Banach conmutativa y con unidad. Lip(X,A) tiene involución si A la tiene.

La norma $\|f\| = \|f\|_0 + \|f\|_d$ es equivalente a tomar $\sup(\|f\|_0, \|f\|_d)$ con lo que se puede tomar una u otra. Sherbert en (2) toma la segunda y en algunos trabajos posteriores de sus discipulos también, aunque la usual es la primera.

Pasamos a describir algunas propiedades elementales de este álgebra. A partir de ahora supondremos siempre que A es un álgebra de Banach conmutativa con unidad e involución.

I.1.4.- Proposición

Lip(X,A) es cerrada por truncación: Dada f $\in$ Lip(X,A) y un número real $\lambda > 0$, la función definida por

$$(T_\lambda f)(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ si } \|f(x)\| \leq \lambda \\ \\ \dfrac{\lambda f(x)}{\|f(x)\|} & , \text{ si } \|f(x)\| > \lambda \end{cases}$$

a la que llamaremos truncación de f por λ, es una función del álgebra y verifica que:

$$\|T_\lambda f\|_0 \leq \lambda \qquad \|T_\lambda f\|_d \leq 2\|f\|_d$$

Demostración

Por comodidad, llamaremos g a la función $T_\lambda f$. Desde luego $\|g\|_0 \leq \lambda$. Veamos que $g \in Lip(X,A)$.

Sean: $U = \{x \in X \,;\, \|f(x)\| \leq \lambda\}$

$V = \{x \in X;\ \|f(x)\| < \lambda\}$

Si $x,y \in U$, se tiene:

$$\|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \|f\|_d\, d(x,y)$$

Si $x,y \in V$:

$$\|g(x) - g(y)\| = \left\|\frac{\lambda f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{\lambda f(x)}{\|f(x)\|}\right\| =$$

$$= \frac{\lambda}{\|f(y)\|} \left\| \frac{\|f(y)\|}{\|f(x)\|} f(x) - f(y)\right\| \leq$$

$$\leq \frac{\lambda}{\|f(y)\|}\left\{ \|f(x) - f(y)\| + \left|\frac{\|f(y)\|}{\|f(x)\|} - 1\right| \|f(x)\| \right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\|f(y)\|}\left\{ \|f(x) - f(y)\| + \Big| \|f(y)\| - \|f(x)\| \Big| \right\} \leq$$

$$\leq 2(\|f(x) - f(y)\|) \leq 2\|f\|_d\, d(x,y)$$

Si $x \in U$, $y \in V$:

$$\|g(x) - g(y)\| = \left\|f(x) - \frac{\lambda f(y)}{\|f(y)\|}\right\| \leq$$

$$\leq \|f(x) - f(y)\| + \left|\frac{\lambda}{\|f(y)\|} - 1\right| \|f(y)\| =$$

$$= \|f(x) - f(y)\| + |\lambda - \|f(y)\|| \leq$$

$$\leq 2\,\|f(x) - f(y)\| \leq 2\,\|f\|_d\, d(x,y)$$

como queríamos demostrar.

I.1.5.- Proposición

Lip (X,A) separa los puntos de X: Si $a,b \in X$, $a \neq b$, existe una función $f \in \mathrm{Lip}(X,A)$ tal que $f(a) \neq f(b)$.

Demostración

Sea e el elemento unidad de A y sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{d(x,a)}{d(b,a)}\, e$$

desde luego $f(a) = 0$, $f(b) = e \neq f(a)$. Basta ver que f es del álgebra. Para ello es suficiente ver que la función dada por: $x \to d(x,a)e$ es un elemento del álgebra. En efecto tenemos:

$$\|d(x,a)e - d(y,a)e\| \leq d(x,y)\|e\|$$

Si el espacio X no está acotado, tomaríamos la truncación por la unidad de esa función.

I.1.6.- Proposición

Sea $f \in \mathrm{Lip}(X,A)$ tal que $f(x)$ es invertible para todo $x \in X$ y existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq \varepsilon$ para todo $x \in X$. En tal caso f es un elemento invertible de Lip (X,A).

Demostración

Siempre existe $1/f(x)$ en A, tenemos entonces:

$$\left\|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right\| = \left\|\frac{f(y) - f(x)}{f(x)f(y)}\right\| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\| f(x) - f(y)\| \leq$$

$$\leq \frac{\|f\|_d}{\varepsilon^2}\, d(x,y)$$

Además la aplicación $x \to 1/f(x)$ está acotada.

I.1.7.- Proposición

Si X es compacto, $f \in Lip(X,A)$ y $f(x)$ es invertible en A para todo $x \in X$, entonces f es invertible.

Demostración

Para poder aplicar la Proposición I.1.6.- basta comprobar que existe un número real $\delta > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq \delta$ para todo $x \in X$. En efecto si no fuera así, para cada n natural existiría $x_n \in X$ tal que $\|f(x_n)\| < 1/n$. Sea x un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$, que existe por ser X compacto; una subsucesión $\{x_{i_n}\}$ de $\{x_n\}$ es convergente a x y por lo tanto $\|f(x)\|=0$ de donde $f(x)$ no sería invertible en A.

I.1.8.- Proposición

Lip(X,A) es cerrada por composición con endomorfismos continuos de A.

Demostración

Sea $T: A \to A$ una aplicación lineal y continua y sea $f \in Lip(X,A)$. Se tiene:

$$\|(T \circ f) - (T \circ f)(y)\| = \|T(f(x) - f(y))\| \leq$$

$$\leq \|T\| \cdot \|f(x) - f(y)\| \leq$$

$$\leq \|T\| \cdot \|f\|_d \cdot d(x,y)$$

Y hemos terminado, ya que está claro que $T \circ f$ está acotada si f lo está.

I.2.- Estudio del espectro de Lip(K,A), K compacto.

I.2.0.- En esta sección caracterizamos el espectro de ideales maximales del álgebra descrita en el apartado anterior y describimos sus propiedades topológicas. El resultado fundamental es el teorema I.2.1.-.

Si A es un álgebra de Banach, llamamos espectro de A, Sp A, al conjunto de ideales maximales de A, que coinciden con el conjunto de morfismos lineales multiplicativos de A en el cuerpo complejo.

Se utilizan resultados sobre el álgebra Lip(K,C) que se puede ver en Sherbert (1) o sobre el álgebra C(K,A) que se pueden ver en Naimark (1).

I.2.1.- Teorema

Sea (K,d) compacto. Se tiene que:

$$\mathrm{Sp}\ \mathrm{Lip}(K,A) = K \times \mathrm{Sp}\ A$$

Demostración

Para probar el enunciado usaremos que el espectro maximal del álgebra C(K,A), las funciones contínuas de K en A con la norma del supremo, es K x Sp A. La demostración puede verse en Naimark (1).

Sea M un ideal maximal de A y sea $x \in K$. Entonces

$$M^x = \{f \in \mathrm{Lip}(K,A) \,;\, f(x) \in M\}$$

es un ideal maximal de Lip(K,A) ya que:

$$\mathrm{Lip}(K,A)/M^x \simeq A/M \simeq C$$

Tenemos pues la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} K \times \mathrm{Sp}\ A & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \mathrm{Sp}\ \mathrm{Lip}(K,A) \\ (x,M) & \longrightarrow & M^x \end{array}$$

Obsérvese que $Lip(K,A)$ está contenida en $C(K,A)$ y la inyección natural es continua. La aplicación ψ es la inducida entre los espectros por esa inyección natural. Entonces ψ es simplemente cortar el ideal maximal (x,M) de $C(K,A)$ con $Lip(K,A)$, esto es:

Si $M \in Sp\, A$, llamamos (x,M) al ideal maximal de $C(K,A)$ formado por las funciones que en x toman valores en M y tenemos:

$$\psi(x,M) = (x,M) \cap Lip(K,A)$$

Vamos a ver que ψ es biyectiva.

a) Es inyectiva

a1) $\psi(x,M) \neq \psi(y,M)$ si $x \neq y$.

Basta tomar $f \in Lip(K,A)$ con $f(x) = 0$, $f(y) = e$. Se tiene entonces que $f \in \psi(x,M)$, $f \notin \psi(y,M)$.

a2) $\psi(x,M) \neq \psi(x,N)$ si $M \neq N$.

En efecto, sea $a \in M$, $a \notin N$ y sea $f \in Lip(K,A)$ la función constante $f(y) = a$, para todo $y \in K$. En ese caso f es de $\psi(x,M)$ pero no es de $\psi(x,N)$.

a3) $\psi(x,M) \neq \psi(y,N)$ si $x \neq y$, $M \neq N$.

Sea $f \in Lip(K,A)$ con $f(x) = 0$, $f(y) = e$, en ese caso f es de $\psi(x,M)$ pero no es de $\psi(y,N)$.

b) Es epiyectiva

Sea I un ideal maximal de $Lip(K,A)$. I no contiene elementos invertibles en $C(K,A)$, con lo que I está contenido en un ideal maximal $\bar{I}$ de $C(K,A)$. Consideremos el ideal $\psi(\bar{I}) = I \cap Lip(K,A)$. El ideal $\psi(\bar{I})$ contiene a I, y por ser éste maximal es I.

De ahora en adelante a los ideales maximales del álgebra Lip(K,A) los llamaremos (x,M) en donde x es un punto de K y M es un ideal maximal de A. (x,M) está formado por todas las funciones f de Lip(K,A) tales que f(x) es de M.

I.2.2.- Proposición

La topología producto en K x Sp A coincide con la topología espectral inducida por Lip(K,A).

(Entendemos por topología producto, la inicial en K por la espectral en Sp A).

Demostración

Veamos que la topología producto es más fina que la espectral en K x Sp A.

Sea M un ideal maximal de A. Llamaré φ_M al carácter inducido por M.

Los entornos espectrales de K x Sp A son de la forma:

$$U((x,M),\ \varepsilon,\ g_1,\dots,\ g_n) =$$

$$=\{(y,N)\,;|\varphi_N(g_i(y)) - \varphi_M(g_i(x))| < \varepsilon,\ i=1,..,n\}$$

siendo g_i elementos de Lip(K,A).

Veamos que contiene un entorno de (x,M) en la topología producto.

Sean:

$$U_1 = \{y \in K; \|g_i(y) - g_i(x)\| < \frac{\varepsilon}{3},\ i = 1,..n\}$$

$$U_2 = \{N \in \mathrm{Sp}\ A\ ;\ |\varphi_N(g_i(x)) - \varphi_M(g_i(x))| < \frac{\varepsilon}{3},\ i=1,..,n\}$$

U_1 es un entorno abierto de x ya que las $g_i \in$ Lip(K,A) son funciones contínuas. U_2 es un entorno espectral de M en Sp A.

$$|\varphi_N(g_i(y)) - \varphi_M(g_i(x))| \leq |\varphi_N(g_i(y)) - \varphi_N(g_i(x))| +$$

$$|\varphi_N(g_i(x)) - \varphi_M(g_i(x))| \leq$$

$$< \|g_i(y) - g_i(x)\| + \varepsilon/3 < 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

de donde $U_1 \times U_2 \subset U$.

Ahora bien, K x Sp A es compacto con ambas topologías, y por tanto al ser una más fina que otra ambas coinciden. De ahí la identificación de K x Sp A con Sp Lip(K,A) es topológica.

I.2.3.- Proposición

Si A es regular, Lip(K,A) es regular.

Demostración

Sea $(x,M) \in$ Sp Lip(K,A) y U un entorno abierto espectral de (x,M). Vamos a construir una función $g \in$ Lip(K,A) tal que $g((x,M)) = 1$ y que g se anule en el complementario de U.

Sean $U_1 \subset K$ y $U_2 \subset$ Sp A, abiertos tales que $U_1 \times U_2 \subset U$, además $x \in U_1$, $M \in U_2$.

Sea $f \in$ Lip(K,C) con $f(x) = 1$ y f nula en $K - U_1$. La función f existe por ser Lip(K,A) un álgebra regular (véase Sherbert 1 y 2).

Sea $a \in A$ con $\varphi_M(a) = 1$ y a nula sobre Sp A - U_2. También a existe por ser A un álgebra regular.

Sea $g = af$. Esto es $g(x) = af(x)$. La función g es de Lip(K,A), pues está acotada y además:

$$\|g(x) - g(y)\| = \|a\| \cdot |f(x) - f(y)|$$

Y queda:

$$g((x,M)) = \varphi_M(g(x)) = \varphi_M(af(x)) = \varphi_M(a) = 1$$

g es nula en Sp Lip(K,A) - $U_1 \times U_2$, luego nula en el complementario de U en Sp Lip(K,A).

I.3.- Teorema de representación y consecuencias.

I.3.0.- En este párrafo se interpretan los elementos del álgebra Lip(K,A) como funciones a valores complejos definidas en un cierto espacio métrico. Además se comprueba que cumplen una condición de Lipschitz en ese espacio. Todo esto es el teorema I.3.1.-.

Este resultado nos permite atacar y resolver el problema de extensión de una función que cumpla una condición de Lipschitz y estando valorada en un álgebra de Banach. Este estudio se hace en el Teorema I.3.2.-.

Se utiliza el teorema de extensión de Banach para funciones a valores complejos cuya demostración se puede ver en cualquiera de los artículos comentados en la introducción general a este Capítulo I. También se puede ver en Sherbert (1).

I.3.1.- Teorema

Lip(K,A) se representa como una subálgebra de Lip(K x Sp A, C), dotando a K x Sp A de la topología métrica definida por:

$$\delta((x,M),(y,N)) = \sup \{d(x,y), \|\varphi_M - \varphi_N\|\}$$

Entendiendo φ_M y φ_N como elementos de la esfera unidad de A' dotado de la topología fuerte.

Demostración

Sea $f \in$ Lip(K,A). Si $(x,M) \in$ K x Sp A, f define una función f en K x Sp A de la siguiente forma:

$$\overline{f}((x,M) = \varphi_M(f(x))$$

a valores en los números complejos.

Basta ver que $\overline{f} \in$ Lip(K x Sp A, C) dotado K x Sp A de la distancia δ. Se tiene:

Sean $y \in U_1$, $N \in U_2$. Se tiene:

$$|\overline{f}((x,M)) - \overline{f}((y,N))| = |\varphi_M(f(x)) - \varphi_N(f(y))| \leq$$

$$|\varphi_M(f(x)) - \varphi_M(f(y))| + |\varphi_M(f(y)) - \varphi_N(f(y))| \leq$$

$$\leq \|\varphi_M\| \cdot \|f(x) - f(y)\| + \|\varphi_M - \varphi_N\| \cdot \| f(y)\| \leq$$

$$\leq \|f\|_d \, d(x,y) + \|f\|_0 \, \|\varphi_M - \varphi_N\| \leq$$

$$\leq \|f\| \, \delta((x,M),(y,N))$$

con lo que hemos terminado.

Así tenemos la siguiente representación:

$$\eta: \mathrm{Lip}(K,A) \longrightarrow \mathrm{Lip}(K \times \mathrm{Sp}\, A, C)$$

$$f \longrightarrow \overline{f} : (x,M) \longrightarrow \varphi_M(f(x))$$

I.3.2.- <u>Corolario</u>

La aplicación definida en el teorema anterior es continua y, si A es semisimple, es inyectiva.

<u>Demostración</u>

$$\|\eta(f)\| = \|\eta(f)\|_0 + \|\eta(f)\|_d \leq \|f\| + \|f\| = 2\|f\|$$

de donde η es continua.

Si A es semisimple, la inyectividad es clara pues η es la representación espectral de Lip(K,A). O de otra forma, $\eta(f) = 0$, implica que para cada $x \in K$, $f(x)$ es nula en todo punto de Sp A, esto es que $f(x)$ es del radical de A.

I.3.3.- <u>Comentario 1</u>. La representación dada en el teorema anterior es la misma que la que da Sherbert en (2). En ese artículo, la distancia que utiliza Sherbert en Sp Lip(K,A) es:

$$\bar{\delta}((x,M),(y,N)) = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in \mathrm{Lip}(K,A)}} |\varphi_M(f(x)) - \varphi_N(f(y))|$$

Esta distancia y la que usamos nosotros son acotadamente equivalentes (la nomenclatura es de Sherbert (2)), y por lo tanto las funciones de Lipshitz con ambas distancias son las mismas. Se verifica que:

$$2\delta((x,M),(y,N)) \geq \bar{\delta}((x,M),(y,N)) \geq \min\{1,1/\mathrm{diam}\ K\}\ \delta((x,M),(y,N))$$

En efecto: La segunda desigualdad se comprueba de la siguiente forma: Tomando $f(z) = (d(z,x)/\mathrm{diam}\ K)e$, $f \in \mathrm{Lip}(K,A)$, $\|f\| \leq 1$, de ahí:

$$\bar{\delta}((x,M),(y,N)) \geq |\varphi_N((d(x,y)/\mathrm{diam}\ K)e)| = d(x,y)/\mathrm{diam}\ K$$

Y tomando las funciones constantes:

$$\bar{\delta}((x,M),(y,N)) \geq \sup_{\substack{\|a\| \leq 1 \\ a \in A}} |\varphi_M(a) - \varphi_N(a)| = \|\varphi_M - \varphi_N\|$$

de ahí la segunda desigualdad.

Para la primera desigualdad tenemos:

$$\bar{\delta}((x,M),(y,N)) = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in \mathrm{Lip}(K,A)}} |\varphi_M(f(x)) - \varphi_N(f(y))|$$

$$\leq \sup |\varphi_M(f(x)) - \varphi_M(f(y))| + \sup|\varphi_M(f(y)) - \varphi_N(f(y))|$$

$$\leq d(x,y) + \|\varphi_M - \varphi_N\| \leq 2\delta((x,M),(y,N)).$$

I.3.4.- Comentario 2: La representación estudiada no es sino la representación de Guelfand de Lip(K,A) en $C(K \times Sp\, A, C)$ pero interpretando las imágenes como funciones de Lipschitz sobre $K \times Sp\, A$ con una métrica δ conveniente. Obsérvese que los elementos de la imágen de η son δ-lipschitzianos sobre $K \times Sp\, A$ y son continuos sobre $K \times Sp\, A$ tomando la topología inicial en K por la espectral en Sp A (cuando hablamos de continuidad en $K \times Sp\, A$, nos referimos siempre, y salvo aclaración, a esa topología). Esta topología producto es más débil que la inducida por δ. Así pués tenemos una representación:

$$\mathrm{Lip}(K,A) \longrightarrow \mathrm{Lip}(K \times Sp\, A,\ C) \cap C(K \times Sp\, A,\ C)$$

en donde la condición de Lipchitz y la continuidad están tomadas con topologías distintas.

Por razones que se verán seguidamente necesitamos el siguiente lema que nos permite averiguar con facilidad si un elemento es de la imágen de η.

I.3.5.- Lema

Sea $f\colon K \times Sp\, A \longrightarrow C$, δ-lipschitziana y separadamente continua en $K \times Sp\, A$. Entonces f es continua en el producto $K \times Sp\, A$.

Demostración

Si f es δ-Lipschitz, sea $|f(x,M) - f(y,N)| \leq H\delta((x,M),(y,N))$, $(x_0,M_0) \in K \times Sp\, A$ y $\varepsilon > 0$.

Por ser f separadamente continua, existe un entorno espectral $U(M_0)$ de M_0 tal que si $M \in U(M_0)$ se tiene:

$$|f(x_0,M) - f(x_0,M_0)| < \varepsilon$$

Por otra parte si $x \in K$ y $d(x,x_0) < \varepsilon/H$, se tiene que:

$$|f(x,M) - f(x_0,M)| \leq H\, d\,(x,x_0) < \varepsilon$$

para todo $M \in Sp\, A$.

De ahí si $d(x,x_o) < \varepsilon/H$, $M \in U(M_o)$ se tiene:

$$|f(x,M) - f(x_o,M_o)| \leq |f(x,M) - f(x_o,M)| + |f(x_o,M) - f(x_o,M_o)| < 2\varepsilon$$

y por lo tanto f es continua en el producto K x Sp A.

I.3.5.- Sea ahora F un espacio topológico compacto y sea $A = C(F,C)$, el álgebra de Banach de todas las funciones continuas de F en C con la norma de la convergencia uniforme. En ese caso Sp A = F y además $A = C(\mathrm{Sp}\, A, C)$.

Consideremos el álgebra Lip(K,A). Vamos a ver que, en este caso, la representación η es exhaustiva sobre $\mathrm{Lip}(K \times \mathrm{Sp}\, A,\ C) \cap C(K \times \mathrm{Sp}\, A,\ C)$. En efecto, sea $f: K \times \mathrm{Sp}\, A \longrightarrow C$ una función δ-lipschitziana y continua. Consideremos la función:

$$\begin{array}{ccl} K & \xrightarrow{\ \widetilde{f}\ } & A = C(F,C) \\ x & \longrightarrow & f(x,\ ): M \longrightarrow f(x,M) \end{array}$$

Por ser f continua en K x Sp A, $f(x,\ )$ es continua sobre Sp A, esto es $f(x,\ ) \in A$, luego $\widetilde{f}$ está bien definida.

Por otra parte $\widetilde{f} \in \mathrm{Lip}(K,A)$, en efecto:

$$\|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\| = \sup\{\|f(x,M) - f(y,M)\| \,;\, M \in \mathrm{Sp}\, A\} \leq$$

$$\leq \|f\|_\delta\ \delta((x,M)(y,M)) = \|f\|_\delta\ d(x,y)$$

en donde $\|\ \|_\delta$ es la seminorma $\|\ \|_d$ en K x Sp A.

Veamos ahora que $\eta(\widetilde{f}) = f$. En efecto:

$$\eta(\widetilde{f})(x,M) = \varphi_M(\widetilde{f}(x)) = f(x,M)$$

de donde η es epiyectiva.

Por ser A un álgebra sin radical, η es un isomorfismo.

Más aún: η es un homeomorfismo. Para comprobarlo, basta ver que η^{-1} es continua. En efecto:

$$\|\eta^{-1}(g)\|_o = \sup\{\|\eta^{-1}(g)(x)\|;\ x \in K\} =$$

$$= \sup\{\sup\{\ |g(x,M)|\ ;\ M \in \mathrm{Sp}\ A\}\ ;\ x \in K\} =$$

$$= \sup\{|g(x,M)|\ ;\ x \in K,\ M \in \mathrm{Sp}\ A\} = \|g\|_o$$

$$|\eta^{-1}(g)(x) - \eta^{-1}(g)(y)| = \sup\{|g(x,M) - g(y,M)|\ ;\ M \in \mathrm{Sp}\ A\} \leq$$

$$\leq \|g\|_\delta\ \delta((x,M),(y,M)) = \|g\|_\delta\, d(x,y)$$

de ahí $\|\eta^{-1}(g)\|_d \leq \|g\|_\delta$.

De todo ello $\|\eta^{-1}(g)\| \leq \|g\|$ y por lo tanto η^{-1} es continua.

Así pués Lip(K,A) es homeomorfa por la representación espectral a Lip(K x Sp A, C) $\cap$ C(K x Sp A, C). Todo lo dicho es válido siempre que A sea completamente isométrica al álgebra C(Sp A, C), esto es cuando exista una isometría de álgebra simétrica entre A y C(Sp A, C). Tenemos pués el siguiente teorema:

I.3.6.- Teorema

Sea A una C*-álgebra conmutativa, con unidad y sea (K,d) un compacto métrico con distancia d. El álgebra Lip(K,A) es homeomorfa por la representación espectral al álgebra Lip(K x Spec A, C) $\cap$ C(K x Spec A, C) tomando en K x Spec A la distancia δ definida en I.3.1.- para la condición de lipschitz y la topología producto de la inicial en K por la topología débil en Spec A para la continuidad.

Condiciones equivalentes a que A sea una C*-álgebra conmutativa y con unidad pueden verse en Naimark (1).

Como consecuencia de este teorema, obtenemos el siguiente teorema de extensión:

I.3.7.- Teorema

En las mismas condiciones para A y K que en el teorema I.3.4.-, sea D un subconjunto cerrado de K y sea $f: D \longrightarrow A$ una función acotada tal que exista un número real $\lambda > 0$ tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda d(x,y)$$

para toda pareja de puntos x,y de K. Entonces existe una función $F \in Lip(K,A)$ que coincide con f en D, es decir existe una extensión de f a K.

Demostración

Sea $\|f(x)\| \leq \mu$, $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda d(x,y)$, $x, y \in D$.

A.- Consideremos la función: $D \times Sp\ A \xrightarrow{f^*} C$
$(x,M) \longrightarrow f^*(x,M) = \varphi_M(f(x))$

f^* es continua en $D \times Sp\ A$ y es δ-lipschitziana verificando que

$$\|f^*(x,M)\| \leq \mu, \quad \|f^*(x,M) - f^*(y,N)\| \leq (\lambda + \mu)\delta((x,M),(y,N))$$

Además, f^* es continua sobre Sp A uniformemente sobre D. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $P \in Sp\ A$, para cada $x \in D$, existe V_x entorno abierto de x y U_x entorno espectral de P tales que: $|f^*(y,M) - f^*(x,P)| < \varepsilon/2$, para todo $y \in V_x$ y $M \in U_x$. Los abiertos $\{V_x;\ x \in D\}$ son un recubrimiento abierto del compacto D, sea $V_1 \dots V_u$ un subrecubrimiento finito, correspondientes a $x_1 \cdots x_n$ y siendo $U_1 \cdots U_n$ los correspondientes entornos de P. Sea $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$.

Sean $y \in D$, $M \in U$, sea $y \in V_i$. Se tiene:

$$|f^*(y,M) - f^*(y,P)| \leq |f^*(y,M) - f^*(x_i,P)| + |f^*(x_i,P)| - f^*(y,P)| < \varepsilon$$

puesto que $M \in U \subset U_i$. Vamos a utilizar posteriormente esta propiedad.

B.- Sea $M \in Sp\ A$ y considérese la función $D \xrightarrow{f^*_M} C$
$x \longrightarrow f^*_M(x) = f^*(x,M)$

f_M^* es Lipschitz en D y además $|f_M^*(x)| \leq \mu$,

$|f_M^*(x) - f_M^*(y)| \leq \lambda d(x,y)$

Tenemos así una familia $\{f_M^*: D \longrightarrow C;\ M \in Sp\ A\}$ acotadas por M y con constante de Lipschitz λ.

C.- Cada miembro de la familia extiende a X de la forma clásica:

$f_M^* = a_M + ib_M$, partes real e imaginaria, siendo $a_M, b_M: D \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$|a_M(x)| \leq \mu$, $|a_M(x) - a_M(y)| \leq \lambda d(x,y)$

$|b_M(x)| \leq \mu$, $|b_M(x) - b_M(y)| \leq \lambda d(x,y)$

Obsérvese que, de acuerdo con las propiedades de f^* estudiadas en A.-, dado $P \in Sp\ A$ y $\varepsilon > 0$, existe un entorno espectral U de P tal que:

$$|a_M(x) - a\ (x)| < \varepsilon \qquad \text{si } M \in U \text{ y } \quad x \in D$$

$$|b_M(x) - b_P(x)| < \varepsilon$$

Las extensiones de a_M y b_M vienen dadas por:

$B_M, A_M: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad A_M(z) = \sup\{a_M(x) - \lambda d(x,z);\ x \in D\}$

$$B_M(z) = \sup\{b_M(y) - \lambda d(y,z);\ y \in D\}$$

verificando que $\quad |A_M(z)| \leq \mu$, $|A_M(z) - B_M(t)| \leq \lambda d(x,y)$

$$|B_M(z)| \leq \mu,\ |B_M(z) - B_M(t)| \leq \lambda d(x,y)$$

Y de las propiedades ya probadas de a_M y b_M obtenemos que dados $\varepsilon > 0$ y $P \in Sp\ A$, existe un entorno espectral U de P tal que

$$|A_M(z) - B_P(z)| < \varepsilon$$

$$|B_M(z) - B_P(z)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } M \in U,\ \ z \in X.$$

Sea ahora $F_M^* = A_M + iB_M: X \longrightarrow C$, se tiene:

$|F^*_M(z)| \leq \mu\sqrt{2}$

$|F^*_M(z) - F^*_M(t)| \leq \lambda\sqrt{2}\, d(x,y)$

teniendo en cuenta las cotas de A_M y B_M.

Así tenemos una familia $\{F^*_M: X \longrightarrow C;\ M \in \mathrm{Sp}\, A\}$ de funciones acotadas por $\mu\sqrt{2}$ y lipschitzianas de constante $\lambda\sqrt{2}$

D.- Consideremos la función $F^*: X \times \mathrm{Sp}\, A \longrightarrow C$

$$(X,M) \longrightarrow F^*_M(x)$$

que tiene las siguientes propiedades:

1.- F^* es continua sobre X para cada $M \in \mathrm{Sp}\, A$ fijo.

En efecto pués $F^*(\ ,M) = F^*_M$ que es continua y además lipschitziana sobre X con constante $\lambda\sqrt{2}$.

2.- F^* es continua sobre $\mathrm{Sp}\, A$ para $z \in X$ fijo.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $P \in \mathrm{Sp}\, A$. Sabemos existe un entorno espectral U de P tal que si $M \in U$, $|A_M(z) - A_P(z)| < \varepsilon$, $|B_M(z) - B_P(z)| < \varepsilon$, para todo $z \in X$. De ahí

$|F^*(z,M) - F^*(z,P)| < \varepsilon$, para todo $M \in U$ y $z \in X$.

3.- F^* es δ-lipschitziana. En efecto:

$$|F^*(x,M) - F^*(y,N)| \leq |F^*(x,M) - F^*(y,M)| + |F^*(y,M) - F^*(y,N)|$$

$$\leq \lambda\sqrt{2}\, d(x,y) + \|y_M - y_N\| \ \| F^*_y\| \leq$$

$$\leq \lambda\sqrt{2}\, d(x,y) + \|y_M - y_N\| \mu\sqrt{2} \leq (\lambda + M)\sqrt{2}\ \delta((x,M),(y,N))$$

De 1.-2.- y 3.- obtenemos que F^* es continua en el producto $X \times \mathrm{Sp}\, A$, y por ser δ-lipschitziana, F^* pertenece a la imagen de la representación (lema I.3.5.-)

$$\eta : \mathrm{Lip}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Lip}(X \times \mathrm{Sp}\, A,\ C) \cap C(X \times \mathrm{Sp}\, A,\ C)$$

De ahí, existe $F \in Lip(X,A)$ con $\eta(F) = F^*$.

Veamos que F es una extensión de f : Si $x \in D$ se tiene:

$$\varphi_M(F(x)) = F^*(x,M) = f^*(x,M) = \varphi_M(f(x))$$

para todo $M \in Sp\ A$, y ahí $F(x) = f(x)$.

Vamos a calcular la norma de F:

$$\|F(x)\| = \sup \{|\varphi_M(F(x)| \ ; M \in Sp\ A\} =$$

$$= \sup \{|F^*(x,M)| \ ; M \in Sp\ A\} \leq \mu\sqrt{2}$$

$$\|F(x) - F(y)\| = \sup \{|\varphi_M(F(x) - F(y))| \ ; M \in Sp\ A\} =$$

$$= \sup \{|F^*(x,M) - F^*(y,M)| \ ; M \in Sp\ A\} \leq$$

$$\leq (\lambda + \mu)\sqrt{2}\ d(x,y)$$

De ahí:

$$\|F\| = \|F\|_0 + \|F\|_d \leq \|f\|_0\sqrt{2} + (\|f\|_0 + \|f\|_d)\sqrt{2} = \sqrt{2}(2\|f\|_0 + \|f\|_d)$$

I.3.8.- Corolario

En las mismas condiciones para X y A que en el teorema anterior, si D no es cerrado, es válido el resultado.

Demostración

Sea $\overline{D}$ la adherencia de D. $\overline{D}$ es compacto y f extiende por continuidad a $\overline{D}$ conservando la cota y la constante de Lipschitz.

II.0.- Introducción.

El estudio de las funciones que cumplen una condición de Lipschitz fué iniciado esencialmente por Sherbert, (1) y (2). En estos artículos se dota al álgebra de las funciones definidas en un espacio métrico (X,d) a valores complejos y que cumplan una condición de Lipschitz de una norma que la hace álgebra de Banach y se estudian sus propiedades. En el primer artículo se estudian los ideales de nulidades de un punto y de un cerrado de X y los ideales primarios, conjeturando que se verifica la síntesis espectral para ideales cerrados; se estudian además las derivaciones de ese álgebra y su relación con los ideales primarios asociados a un ideal. La conjetura enunciada fué resuelta en un caso particular por Glaeser (1) y en casos más generales por Waelbroek (1).

En el artículo segundo se comparan las topologías inicial en X y la inducida por el álgebra y se estudia la regularidad de ese álgebra, que llamaremos Lip (X,d).

El estudio de Sherbert se continúa en Jhonson (1), (2) y (3) para funciones a valores en un espacio de Banach E y que cumplan una condición de Lipschitz. Si E es R ó C, se estudian los puntos extremales de la esfera unidad de $Lip(X,d^{\alpha})$, siendo $0 < \alpha \leq 1$, y se caracterizan los subconjuntos relativamente compactos de $lip(X,d)$ para X compacto ($lip(X,d)$ son las funciones de $Lip(X,d)$ tales que
$|f(x) - f(y)|/d(x,y) \to 0$ cuando $d(x,y) \to 0$ y constituye una subálgebra cerrada de $Lip(X,d)$). Además se caracteriza a $Lip(X,d)$ a valores en E como un espacio de Banach dual si E lo es.

En 1976, Daly y Downum (1) estudian el álgebra de las funciones de clase C^n en $[0,1]$ a valores complejos tales que la derivada n-sima cumpla una condición de Lipschitz. Dan varias caracterizaciones de ese álgebra y estudian los ideales primarios. Enuncian un teorema de síntesis espectral pero la demostración que dan no es correcta.

Con estos presupuestos se pueden plantear generalizaciones varias de estos problemas, que interesa conocer.

Nosotros hemos pretendido estudiar en este capítulo II el álgebra de las funciones de clase C^m en un compacto K de R^n, a valores complejos, tales que todas sus derivadas parciales m-simas cumplan una condición de Lipschitz. El capítulo está dividido en cuatro secciones que pasamos a comentar.

La sección II.1.- es de notaciones.

La sección II.2.- da las definiciones precisas del álgebra a estudiar, y después de algunas proposiciones descriptivas de propiedades elementales de este álgebra y de propiedades de la norma, pasa a caracterizar el ideal de nulidades de un punto. El resultado principal es el teorema II.2.2.4.- Este resultado es una generalización del obtenido por Sherbert en (1) y del obtenido por Daly-Downum en (1), pero el método utilizado para demostrarlo es distinto. El método es semejante al usado por Whitney en (1) para probar los teoremas de extensión de funciones diferenciables.

La sección II.3.- estudia los ideales primarios en un punto de K. El esquema previo es todo lo que ocurre en el caso C^n y los resultados son semejantes, aunque menos precisos. Los resultados obtenidos generalizan el trabajo de Daly-Downum (1) que está hecho para el caso $n = 1$. Los métodos son semejantes aunque la descripción es más incompleta por la complicación de la dimensión.

La sección II.4.- introduce las derivaciones de orden $m+1$ en un punto de K y estudia sus relaciones con los ideales primarios. Esas derivaciones se definen como funcionales continuos que se anulan sobre un cierto subconjunto del álgebra. El precedente es el estudio de Sherbert (1) para el caso $m=0$, aunque los resultados no son exactamente iguales.

Despues pasamos a estudiar los ideales primarios asociados a un ideal y la relación entre las derivaciones y algunos de ellos. Los resultados principales son las proposiciones II.4.3.3.- y II.4.4.1.- y se pueden enunciar así: Si I es un ideal cerrado y $a \in K$ es un cero de todas las funciones de I y de todas sus derivadas hasta el orden m inclusive, el ideal primario asociado a I en ese punto está formado por todas las funciones del álgebra sobre las que se anulan todas las derivaciones nulas sobre I, esto es, todas las funciones que "aparecen como constantes para todas las derivaciones que ven a las funciones de I como funciones constantes".

En la sección II.5.-, última de este capítulo, se estudia la síntesis espectral en ese álgebra y el ideal de nulidades de un cerrado F de K.

II.1.- <u>Notaciones.</u>

A los puntos de R^n los denotaremos $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Los vectores de la base usual de R^n serán $e_1,e_2,\ldots e_n$.

Un multiíndice es una colección $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ de n números naturales ordenados. Llamaremos $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si α y β son multiíndice diremos que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, para $i=1,2,\ldots,n$. Llamaremos $\alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!$.

Por D^α entendemos el operador:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Si $a \in R^n$, $h \in N$ y f es una función definida en R^n, ponemos:

$$\Delta_a^o f(x) = f(x)$$

$$\Delta_a^1 f(x) = f(x+a) - f(x)$$

$$\Delta_a^h f(x) = \Delta_a^{h-1}(\Delta_a^1 f(x))$$

Si $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ es un multiíndice, escribimos:

$$\Delta_a^\alpha f(x) = \Delta_{a_1 e_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{a_n e_n}^{\alpha_n} f(x)$$

Verificandose:

$$\Delta_a(f_1 \ldots f_n)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \ldots f_{i-1}(x) \Delta_a f_i(x) \ {}_a f_{i+1}(x+a) \ldots f_n(x+a)$$

Si f es una función definida en R^n y $A \subset R^n$ ponemos:

$$\|f\|_o^A = \sup \{|f(x)| \ ; \ x \in A\}$$

$$\|f\|_d^A = \sup \{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} \ ; \ x,y \in A, \ x \neq y\}$$

Si f es, al menos, de clase C^m, ponemos: (si existen)

$$\|f\|^A = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\|D^\alpha f\|_o^A}{\alpha!} + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha f\|_d^A$$

II.2.- Definiciones. Funciones planas en un punto.

II.2.0.- Introducción.

En el apartado II.2.1.- de esta sección introducimos todos los datos del problema y el álgebra con la que vamos a trabajar. Describimos, además, sus propiedades elementales que vamos a necesitar posteriormente.

En el apartado II.2.2.- estudiamos el ideal de nulidades cerrado de un punto. Ese ideal queda caracterizado en función de propiedades de las funciones y de sus derivadas en el punto.

Todos los resultados de esta sección son generalización de las propiedades del álgebra Lip(K,C) descrita por Sherbert en (1) con las adaptaciones necesarias. El estudio del ideal de nulidades en el caso $n=1$ está hecho en Daly-Downum (1) aunque sólo para el compacto $[0,1]$. En este caso el método a utilizar es mucho más sencillo debido a que para funciones de una variable real es posible reconstruir la función si se conoce la derivada m-sima y además los valores que toman las m-1 primeras derivadas en un punto. Al no ocurrir ésto, en general, es imposible hacer una demostración directa.

II.2.1.- El álgebra D(m).

Sea K un compacto, adherencia de un abierto, de R^n, $D^m(K)$ es el álgebra de todas las funciones $f:K \to C$ de clase C^m en K y tales que sus derivadas parciales de orden m sean lipschitzianas.

De acuerdo con la definición, si f es de $D^m(K)$, entonces $\|f\|^K$ es finita y la llamamos simplemente $\|f\|$. $\| \ \|$ es una norma que dota a $D^m(K)$ de estructura de álgebra de Banach conmutativa y con unidad, semisimple y con involución simétrica.

Si K cumple la condición P de Whitney (Dados dos puntos x e y de K, existe una poligonal finita $P \subset K$ que una x con y tal que la longitud de sus lados sea menor o igual que d(x,y)) entonces las funciones de clase C^{m+1} en K son de $D^m(K)$ y por tanto ésta es regular. Para más detalles véase Kufner-John-Fučik (1), página 24 y siguientes. Es suficiente que K sea convexo para que verifique la propiedad P y eso es lo que vamos a suponer de ahora en adelante, que K es convexo.

Con las notaciones ya señaladas, una función $f:K \to C$ es de $D^m(K)$ si y sólo si verifica:

1.- f es de clase C^m en K.

2.- Existe un número real mayor que cero, λ, tal que

$$|\Delta_a D^\alpha f(x)| \leq \lambda \|a\|, \quad \text{si } |\alpha| = m.$$

Por simplicidad en la notación y teniendo en cuenta que K es fijo, pondremos D(m) en lugar de $D^m(K)$.

Se tiene que Spec D(m) = K, entendiendo por Spec el espectro de ideales maximales, y además la siguiente:

II.2.1.1.- <u>Proposición</u>

La topología inducida por D(m) en K coincide con la topología inicial de K.

<u>Demostración</u>

Dado un abierto espectral entorno de $a \in K$,

$$U = U(a,f_1,\ldots,f_h;\varepsilon) = \{x \in K; |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon, \ i = 1,\ldots,h\}$$

U es un abierto de la topología inicial puesto que las funciones de D(m) son funciones contínuas.

Por otra parte, K es compacto con ambas topologías y acabamos de probar que una es más fina que la otra, de ahí que ambas coinciden.

En la siguiente proposición obtenemos una forma de construir funciones de $D(m)$.

II.2.1.2.- Proposición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $C^{m+1}(K,C)$ acotada en norma por una constante. Si f_n converge a f en $C^m(K,C)$, entonces f es de $D(m)$.

Demostración

La función f es de clase C^m, basta pués ver que si $|\alpha| = m$ entonces $D^\alpha f$ es lipschitziana.

Si x es un punto de K, se tiene que $D^\alpha f_n(x) \to D^\alpha f(x)$. Sea $a \in R^n$ con $x+a \in K$, tenemos que $\Delta_a D^\alpha f_n(x) \to \Delta_a D^\alpha f(x)$.

Ahora bien:

$$|\Delta_a D^\alpha f_n(x)| = |D^\alpha f_n(x+a) - D^\alpha f_n(x)| = \Big|\sum_{|\delta|=1} D^{\alpha+\delta} f_n(\xi_\delta) a^\delta\Big| \leq \lambda n \|a\|$$

Y de ahí:

$$|\Delta_a D^\alpha f(x)| \leq n\,\lambda \|a\|$$

con lo que $D^\alpha f$ es lipschitziana.

La siguiente proposición es una generalización de la obtenida por Glaeser en (1) y nos da un método de hallar la norma sub d de las derivadas m-simas de un producto.

II.2.1.3.-Proposición

Sea $A \subset K$, A convexo, y α un multiíndice con $|\alpha| = m$.

Se tiene:

$$\|D^\alpha(fg)\|_d^A \leq \|f\|_o^A \|D^\alpha g\|_d^A + \|D^\alpha f\|_d^A \|g\|_o^A +$$

$$+ (m-1)! \left(\sum_{|\gamma| \leq m} \frac{\|D^\gamma f\|_0^A}{\gamma!} \right) \left(\sum_{|\beta| \leq m} \frac{\|D^\beta g\|_0^A}{\beta!} \right)$$

para toda f,g D(m).

Demostración

$$|D^\alpha(fg)(x) - D^\alpha(fg)(y)| =$$

$$= \Big| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x) - D^\beta f(y) D^{\alpha-\beta} g(y)] \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [\, |D^\beta f(x) D^{\alpha-\beta} g(x) - D^\beta f(y) D^{\alpha-\beta} g(y)| \,] \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [\, |D^\beta f(x) - D^\beta f(y)| \, |D^{\alpha-\beta} g(x)| + |D^\beta f(y)| \, |D^{\alpha-\beta} g(x) - D^{\alpha-\beta} g(y)| \,]$$

y separando los casos $\beta = 0$, $0 < \beta < \alpha$, $\beta = \alpha$, nos queda:

$$\|D^\alpha(fg)\|_d^A \leq \Big(\sum_{|\nu|=1} \|D^\nu f\|_0^A \Big) \|D^\alpha g\|_0^A + \|f\|_0^A \|D^\alpha g\|_d^A +$$

$$+ \sum_{0 < \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \Big[\Big(\sum_{|\nu|=1} \|D^{\beta+\nu} f\|_0^A \Big) \|D^{\alpha-\beta} g\|_0^A + \|D^\beta f\|_0^A \Big(\sum_{|\mu|=1} \|D^{\alpha-\beta+\mu} g\|_0^A \Big) \Big] +$$

$$+ \|D^\alpha f\|_d^A \|g\|_0^A + \|D^\alpha f\|_0^A \Big(\sum_{|\mu|=1} \|D^\mu g\|_0^A \Big) \leq \qquad \text{(xx)}$$

$$\|f\|_0^A \|D^\alpha g\|_d^A + \|D^\alpha f\|_d^A \|g\|_0^A + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \Big(\sum_{|\nu|=1} \|D^{\beta+\nu} f\|_0^A \Big) \|D^{\alpha-\beta} g\|_0^A +$$

$$+ \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta f\|_0^A \Big(\sum_{|\mu|=1} \|D^{\alpha-\beta+\mu} g\|_0^A \Big) \leq$$

$$\leq \|f\|_0^A \|D^\alpha g\|_d^A + \|D^\alpha f\|_d^A \|g\|_0^A +$$

$$+ (m-1)! \sum_{0 \leq \beta < \alpha} \frac{\sum_{|\nu|=1} \|D^{\beta+\nu} f\|_0^A}{(\beta+\nu)!} \cdot \frac{\|D^{\alpha-\beta} g\|_0^A}{(\alpha-\beta)!} +$$

$$+ (m-1)! \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \frac{\|D^\beta f\|_0^A}{\beta!} \cdot \frac{\sum_{|\mu|=1} \|D^{\alpha-\beta+\mu} g\|_0^A}{(\alpha-\beta+\mu)!} \leq$$

$$\leq \|f\|_0^A \|D^\alpha g\|_d^A + \|D^\alpha f\|_d^A \|g\|_0^A + (m-1)! \Big(\sum_{|\gamma| \leq m} \frac{\|D^\gamma f\|_0^A}{\gamma!} \Big) \Big(\sum_{|\beta| \leq m} \frac{\|D^\beta g\|_0^A}{\beta!} \Big)$$

pués: $\frac{\alpha!}{(m-1)!\beta!} = \frac{\alpha!}{m!} \cdot \frac{1}{(m-1)!\beta!} \leq \frac{1}{(\beta+\mu)!}$ si $|\alpha| = m$, y $|\mu| = 1$.

II.2.2.- Funciones planas en un punto.

II.2.2.1.- Lema

Sea z un punto de K y f una función de D(m) tal que ella y todas sus derivadas parciales hasta el orden m, inclusive, se anulen en z.

Supongamos que:

$$\frac{\Delta_a Df(x)}{\|a\|} \xrightarrow[\substack{a \to 0 \\ x \to z}]{} 0$$

para todo $|\alpha| = m$.

Entonces, para cada número natural h existe un número real $\eta(h)$ tal que:

1.- $|D^\alpha f(x)| \leq \eta(h)/h$, si $x \in U(z,1/h)$, bola de centro z y radio 1/h.

2.- $\eta(h) \to 0$ si $h \to \infty$.

Demostración

Sea $x \in U(z,1/h)$, se tiene: Si $|\alpha| = m$

$$|D^\alpha f(x)| = |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(z)| = |\Delta_{x-z} D^\alpha f(z)|$$

Sea:

$$\eta^\alpha(h) = \sup \left\{\frac{|\Delta_{x-z} D^\alpha f(z)|}{\|x-z\|} ;\ x \in U(z,1/h),\ x \neq z\right\}$$

que existe por ser $D^\alpha f$ una función lipschitziana.

Se tiene: $|D^\alpha f(x)| \leq \eta^\alpha(h) d(x,z) < \eta(h)/h$ (x)

si x pertenece a $U(z,1/h)$.

Veamos que $\eta^\alpha(h)$ tiende a cero si h tiende a infinito. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\frac{|\Delta_a D^\alpha f(z)|}{\|a\|} < \epsilon/2 \qquad \text{si } \|a\| < \delta.$$

(x) $\eta(h) = \sup \{\eta^\alpha(h);\ |\alpha| = m\}$

Sea r, natural, tal que $1/r < \delta$; si $h \geq r$ se tiene que

$$\frac{|\Delta_a D^\alpha f(z)|}{\|a\|} < \varepsilon \quad \text{si} \quad \|a\| < 1/h \quad \text{y de ahí} \quad \eta^\alpha(h) < \varepsilon$$

ya que:

$$\sup \left\{\frac{|\Delta_a D^\alpha f(z)|}{\|a\|} ; \|a\| < 1/h\right\} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Ahora bien si $\eta^\alpha(h)$ tiende a cero también lo hace $\eta(h)$.

OBSERVACION: Lo que se ha probado es que existe $\eta(h)$ cumpliendo las condiciones 1.- y 2.- para toda función f de $D(m)$ tal que $D^\alpha f(z) = 0$ si $|\alpha| \leq m$ y que $\frac{|\Delta_a D^\beta f(z)|}{\|a\|} \xrightarrow[a \to 0]{} 0$ si $|\beta| = m$. Evidentemente las condiciones del enunciado del lema son más fuertes que éstas y por tanto el lema está probado.

Las razones para enunciar el lema con esas condiciones se verán en las proposiciones siguientes.

II.2.2.2.- Corolario

Sea β un multiíndice con $|\beta| < m$. Se tiene:

$$|D^\alpha f(x)| < \eta(h)/h^{m-|\beta|+1} \qquad \text{si } x \in U(z,1/h)$$

para una función en las condiciones del lema II.2.2.1.-.

Demostración

$$|D^\beta f(x)| \leq \frac{1}{(m-|\beta|)!} \sum_{|\gamma|+|\beta|=m} |D^\gamma D^\beta f(\xi)| \|x-z\| \leq$$

$$\leq \frac{n^{(m-|\beta|)!}}{(m-|\beta|)!} \cdot \frac{\eta(h)}{h} \cdot \frac{1}{h^{|\gamma|}} = \frac{\eta(h)}{h^{m-|\beta|+1}}$$

En donde $n^{(m-|\beta|)}$ es una cota superior del número de sumandos, cota superior que puedo cambiar por n^m, y en donde se han integrado en $\eta(h)$ todas las constantes que intervienen.

II.2.2.3.- Lema

Sea z un punto de K y sea H_z el conjunto de las funciones de D(m) tales que:

1.- $D^\alpha f(z) = 0$, para todo $|\alpha| \leq m$.

2.- $$\frac{\Delta_a D^\beta f(x)}{\|a\|} \xrightarrow[\substack{a \to 0 \\ x \to z}]{} 0 \qquad \text{para todo } |\beta| = m$$

H es un cerrado de D(m).

Demostración

Las funciones de D(m) que cumplen la condición 1.- forman un cerrado de D(m), basta pués ver que también lo son las que cumplen la condición 2.-

Sea:

$$S = \{(x,a);\ x \in K,\ a \in R^n,\ a \neq 0,\ x + ta \in K,\ t \in [0,1]\}$$

y sea C(S) el álgebra de las funciones continuas y acotadas sobre S, dotada de la norma del supremo.

Si $|\alpha| = m$, consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} D(m) &\xrightarrow{\psi_\alpha} C(S) \\ f &\longrightarrow \psi_\alpha(f):(x,a) \longrightarrow \frac{\Delta_a D^\alpha f(x)}{\|a\|} \end{aligned}$$

Desde luego $\psi_\alpha(f)$ es continua y está acotada, en efecto:

a) $\psi_\alpha(f)$ es producto de $(x,a) \longrightarrow \Delta_a D^\alpha f(x)$ que es continua por serlo

$D^{\alpha}f$, con $(x,a) \to 1/\|a\|$ que también lo es.

b) Por otra parte:

$$\sup_S \ |\psi_\alpha(f)(x,a)| = \sup_S \frac{|\Delta_a D^{\alpha}f(x)|}{\|a\|} =$$

$$= \sup_S \frac{|D^{\alpha}f(x+a)-D^{\alpha}f(x)|}{\|a\|} \leq \|D^{\alpha}f\|_d^K \leq \|f\|$$

con lo que hemos probado además que ψ_α es una aplicación continua.

Sea W_z^{α} el conjunto de funciones de $C(S)$ tales que $g(x,a) \to 0$ cuando $x \to z$, $a \to 0$. W_z^{α} es un cerrado de $C(S)$, de ahí $\psi_\alpha^{-1}(W_z)$ es un cerrado de $D(m)$ y por tanto

$$H_z = \bigcap_{\alpha = m} \psi_\alpha^{-1}(W_z)$$

también lo es.

II.2.2.4.- Teorema

Sea z un punto de K y sea J_z el ideal de nulidades cerrado de z en $D(m)$ (adherencia del ideal de las funciones de $D(m)$ que son nulas en un entorno de z). Se verifica que $J_z = H_z$.

Demostración

Si f es nula en un entorno de $z \in K$, f cumple las condiciones 1.- y 2.- del lema II.2.2.3.-, por lo que f es de H_z. Por ser H_z un cerrado se tiene que $J_z \subset H_z$.

Veámoslo al revés. Sea $f \in H_z$, vamos a ver que f es límite de una sucesión de funciones nulas en un entorno de z. Por ser f de H_z verifica las condiciones del lema II.2.2.1.-, por lo tanto existe $\eta(h)$ tal que:

$$|D^{\beta}f(x)| < \frac{\eta(h)}{h^{m-|\beta|+1}} \quad , \quad \text{si} \quad x \in U(z,1/h) \quad , \quad |\beta| \leq m$$

y además $\eta(h)$ tiende a cero cuando h tiende a infinito.

Sea $\varphi : R^n \to R$ una función que verifique:

1.- φ es de clase C^∞, $\varphi(x) \in [0,1]$ para todo x de R^n

2.- $\varphi(x) = 0$, si $d(z,x) < 1/2$, esto es si $x \in U(z,1/2)$

3.- $\varphi(x) = 0$, si $d(z,x) \geq 1$, esto es si $x \notin U(z,1)$

La existencia de φ es conocida. Para más detalles véase Narasimhan (1).

$$\text{Sea } M_\alpha = \|D^\alpha\varphi\|_0^{R^n} = \|D^\alpha\varphi\|_0^{U(z,1)}$$

$$M = \max\{M_\alpha \; ; \; |\alpha| \leq m+1\}$$

Para cada número natural h, sea $\varphi_h(x) = \varphi(hx)$.

Se tiene:

$$\|D^\alpha\varphi_h\|_0^{R^n} = h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_0^{R^n} \leq h^{|\alpha|}M \;, \quad \text{si } |\alpha| \leq m+1$$

y además φ_h es nula en $U(z,1/2h)$

Sea $f_h = f\varphi_h$, esto es $f_h(x) = f(x)\varphi_h(x)$. Desde luego f_h es nula en $U(z,1/2h)$ y además f es de $D(m)$, ya que ambas f y φ_h lo son. Se tiene que f y f_h coinciden en $K\text{-}U(z,1/h)$.

Vamos a ver que $\|f-f_h\| \to 0$ cuando h tiende a infinito y habremos terminado.

Sea β un multiíndice con $|\beta| \leq m$, se tiene:

$$\|D^\beta(f-f_h)\|_0 = \sup_{x\in K} |D^\beta f(x) - D^\beta f_h(x)| = \sup_{x\in U(z,1/h)} |D^\beta f(x) - D^\beta f_h(x)|$$

$$\leq \|D^\beta f\|_0^{U(z,1/h)} + \|D^\beta f_h\|_0^{U(z,1/h)}$$

Pero:

$$\|D^\beta f\|_0^{U(z,1/h)} \leq \eta(h)/h^{m-|\beta|+1} \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$$

$$\|D^\beta f_h\|_o^{U(z,1/h)} \le \sum_{\gamma\le\beta} \binom{\beta}{\gamma} \|D^\gamma\varphi_h\|_o^{U(z,1/h)}\|D^{\beta-\gamma}f\|_o^{U(z,1/h)} \le$$

$$\le \sum \binom{\beta}{\gamma} h^{|\gamma|} M \frac{\eta(h)}{h^{m-|\beta|+|\gamma|+1}} =$$

$$= \sum \binom{\beta}{\gamma} \frac{M\eta(h)}{h^{m-|\beta|+1+|\gamma|}} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$$

De ahí $\|D^\beta(f-f_h)\|_o^{R^n} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0.$

Por otra parte, sea ahora α con $|\alpha| = m$ y vamos a calcular $\|D^\alpha(f-f_h)\|_d$, se tiene:

$$\|D^\alpha f - D^\alpha f_h\|_d = \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f_h(x) - D^\alpha f(y) - D^\alpha f_h(y)|}{d(x,y)} =$$

$$= \|D^\alpha f\|_d^{U(z,1/h)} + \|D^\alpha f_h\|_d^{U(z,1/h)}$$

Ahora bien:

$$\|D^\alpha f\|_d^{U(z,1/h)} = \sup_{\substack{x,y\in U(z,1/h)\\ x\neq y}} \frac{|\Delta_{x-y}D^\alpha f(y)|}{d(x,y)} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$$

$$\|D^\alpha f_h\|_d^{U(z,1/h)} = \sup_{\substack{x,y\in U(z,1/h)\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha f_h(x) - D^\alpha f_h(y)|}{d(x,y)} \le$$

$$\le \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta}\|D^\beta\varphi_h . D^{\alpha-\beta}f\|_d^{U(z,1/h)}$$

Pero: $\|D^\beta\varphi_h . D^{\alpha-\beta}f\|_d^{U(z,1/h)} =$

$$= \sup_{\substack{x,y\in U(z,1/h)\\ x\neq y}} \frac{|D^\beta\varphi_h(x)D^{\alpha-\beta}f(x) - D^\beta\varphi_h(y)D^{\alpha-\beta}f(y)|}{d(x,y)} \le$$

$$\leq \sup_{\substack{x,y\in U(z,1/h)\\ x\neq y}} |D^{\beta}\varphi_h(x) \frac{|D^{\alpha-\beta}f(x) - D^{\alpha-\beta}f(y)|}{d(x,y)} +$$

$$+ \sup_{\substack{x,y\in U(z,1/h)\\ x\neq y}} |D^{\alpha-\beta}f(y)| \frac{|D^{\beta}\varphi_h(x) - D^{\beta}\varphi_h(y)|}{d(x,y)}$$

En todas estas expresiones, β va variando con la condición de ser $\beta \leq \alpha$. Para calcularlas tenemos dos casos distintos:

Caso 1: $\beta = 0$. En este caso los dos sumandos quedan:

$$|\varphi_h(x)| \frac{|D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}f(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{|D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}f(y)|}{d(x,y)} \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$$

$$|D^{\alpha}f(y)| \frac{|\varphi_h(x) - \varphi_h(y)|}{d(x,y)} \leq \frac{n(h)}{h} \sum_{|\delta|=1} |D^{\delta}\varphi_h(\xi)| \leq$$

$$\leq nM_n(h) \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$$

ya que $x,y \in U(z,1/h)$.

Caso 2: $\beta \neq 0$. En este caso los dos sumandos quedan:

$$|D^{\beta}\varphi_h(x)| \frac{|D^{\alpha-\beta}f(x) - D^{\alpha-\beta}f(y)|}{d(x,y)} \leq$$

$$\leq h^{|\beta|}M \sum_{|\delta|=1} |D^{\alpha-\beta+\delta} f(\xi) \leq h^{\beta}Mn \frac{n(h)}{h^{m-\alpha+\beta-1+1}} = nMn(h) \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$$

$$|D^{\alpha-\beta}f(y)| \frac{|D^{\beta}\varphi_h(x) - D^{\beta}\varphi_h(y)|}{d(x,y)} \leq$$

$$\leq \frac{n(h)}{h^{m-|\alpha|+|\beta|+1}} \sum_{|\delta|=1} |D^{\beta+\delta}\varphi_h(\xi)| \leq \frac{n(h)}{h^{|\beta|+1}} nMh^{|\beta|+1} =$$

$$= nMn(h) \xrightarrow[h \to \infty]{} 0$$ con lo que hemos terminado.

II.3.- Ideales primarios en D(m).

II.3.0.- Introducción.

Se estudian en esta sección los ideales primarios en un punto a de K.

El punto de partida es el conocimiento de los ideales primarios en un punto a de K en el álgebra $C^m(K)$ de las funciones m veces derivables sobre K. En este caso, sea M_a el ideal maximal de las funciones nulas en a. Las sucesivas potencias cerradas de M_a, esto es $\overline{M_a^i}$ son ideales primarios de ese álgebra en el punto $a \in K$. En $C^m(K)$ se tiene que $\overline{M_a^{m+1}} = J_a$, ideal de nulidades cerrado del punto a. Además, si S_a^h es el ideal cerrado de las funciones nulas en a ellas y sus derivadas hasta el orden h inclusive, se verifica que $\overline{M_a^{h+1}} = S_a^h$ para $h = 1,2,\ldots,m$. Los demás ideales primarios cerrados en a son los subespacios lineales cerrados comprendidos entre dos adyacentes de entre los S_a^h.

Partiendo de esa base se intenta ver los parecidos y las diferencias con ese esquema. En nuestro caso, J_a está contenido estrictamente en S_a^m, lo que añade un eslabón más a esa cadena de ideales primarios, quedando en la forma:

$$J_a \subset S_a^m \subset S_a^{m-1} \subset S_a^{m-2} \subset \ldots \subset S_a^1 \subset S_a^o = M_a$$

Conjeturamos que también en nuestro caso se verifica que $\overline{M_a^{h+1}} = S_a^h$, para $h = 1,2,\ldots m$, pero sólo lo hemos probado en el caso $h = m$. Además probamos que $J_a = \overline{M_a^{h+2}}$. Al igual que en caso $C^m(K)$ los subespacios cerrados comprendidos entre S_a^i y S_a^{i+1} son ideales primarios en a.

El estudio en el caso $n = 1$ está hecho en Daly-Downun (1). En ese caso si que es cierto que $S_a^{i-1} = \overline{M_a^i}$ pero sus métodos no son aplicables a nuestro caso.

II.3.1.- Ideales primarios.

Sea $a \in K$ y sean M_a y J_a los ideales cerrados maximal y minimal, respectivamente, correspondientes al punto a.

Pretendemos estudiar los siguientes ideales asociados al punto a:

a) $\overline{M_a^i}$: Cierre de la potencia i-ésima de M_a, $i \in N$.

b) $S_a^i = \{f \in D(m) \mid D^\alpha f(a) = 0, |\alpha| \leq i\}$, $i \in N$, $i \leq m$.

Los dos tipos $\overline{M_a^i}$ y S_a^i son ideales cerrados y tenemos los siguientes resultados:

II.3.1.1.- Proposición.

a) $\overline{M_a^k} \subset S_a^{k-1}$

b) $\overline{M_a^{m+2}} = J_a$

Demostración

a) Por ser S_a^{k-1} cerrado, basta ver que si f es de M_a^k entonces f es de S_a^{k-1}.

Sea f de M_a^k, $f = \sum_{i=1}^{h} f_i$, con $f_i = g_1 g_2 \ldots g_k$ y $g_i \in M_a$. Basta ver que $f_i \in S_a^{k-1}$. Se tiene:

$$D^\alpha f_i = \sum_{\gamma_i \leq \alpha,\, \Sigma\gamma_i = \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma_1! \cdots \gamma_k!} D^{\gamma_1} g_1 \ldots D^{\gamma_k} g_k$$

Ahora bien, si $|\alpha| < k$ se tiene que $|\gamma_1| + \ldots + |\gamma_k| < k$, luego algún γ_i es nulo, así en cada sumando de esa expresión hay alguna g_i sin estar afectada de ningún operador D, pero $g_i(a) = 0$, y por lo tanto:

$$D^\alpha f_i(a) = 0, \quad \text{si } |\alpha| < k, \text{ de donde } f_i \in S_a^{k-1}$$

b) Al igual que antes, por ser J_a cerrado basta ver que $M_a^{m+2} \subset J_a$ y en ese caso, por ser J_a minimal coinciden.

Sea pues $f \in M_a^{m+2}$, $f = \sum_{i=1}^{h} f_i$,

$f_i = g_1 g_2 \ldots g_m g_{m+1} g_{m+2}$, siendo g_i de M_a.

En primer lugar, $M_a^{m+2} \subset M_a^{m+1} \subset S_a^m$ y de ahí $D^\alpha f(a) = 0$ si $|\alpha| \leq m$. basta pues probar la condición 2 del Lema II.2.2.3.- para cada f_i.

Sea entonces $|\beta| = m$ y calculemos $D^{\beta}f_i$, tenemos:

$$D^{\beta}f_i = D^{\beta}(g_1\ldots g_{m+2}) = \sum_{\Sigma\gamma_i=\beta} \frac{\beta!}{\gamma_1!\cdots\gamma_{m+2}!} D^{\gamma_1}g_1\ldots D^{\gamma_{m+2}}g_{m+2}$$

La condición 2 del referido lema es lineal, de ahí basta probarla para cada sumando. Obsérvese que al ser $|\gamma_1|+\ldots+|\gamma_{m+2}| = m$, al menos dos de las γ_i de cada sumando son nulas, se tiene entonces:

$$\frac{\Delta_b\left[D^{\gamma_1}g_1(x)\ldots D^{\gamma_{m+2}}g_{m+2}(x)\right]}{\|b\|}$$

$$= \sum_{i=1}^{m+2} D^{\gamma_1}g_1(x)\ldots D^{\gamma_{i-1}}g_{i-1}(x)\,\frac{\Delta_b D^{\gamma_i}g_i(x)}{b}\,D^{\gamma_{i+1}}g_{i+1}(x+b)\ldots D^{\gamma_{m+2}}g_{m+2}(x+b)$$

De ahí obtenemos:

$$\frac{\left|\Delta_b\left[D^{\gamma_1}g_1(x)\ldots D^{\gamma_{m+2}}g_{m+2}(x)\right]\right|}{\|b\|} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m+2} \|g_i\|\,\left|D^{\gamma_1}g_1(x)\ldots \widehat{D^{\gamma_i}g_i(x)}\ldots D^{\gamma_{m+2}}g_{m+2}(x+b)\right|$$

que tiende a cero si x tiende a a y b tiende a cero, ya que al menos dos de las γ_i son nulas y $g_j(a) = 0$ para todo j.

De esta proposición obtenemos el siguiente esquema de los ideales primarios cerrados en el punto a:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
J_a = M_a^{m+2} & \subset & M_a^{m+1} & \subset & M_a^{m} & \subset & \ldots & \subset & M_a^{3} & \subset & M_a^{2} & \subset & M_a \\
 & & \cap & & \cap & & & & \cap & & \cap & & \\
 & & S_a^{m} & \subset & S_a^{m-1} & \subset & \ldots & \subset & S_a^{2} & \subset & S_a^{1} & &
\end{array}$$

Pasamos ahora a enunciar y demostrar algunos resultados técnicos que se usarán posteriormente y algunas consecuencias inmediatas de esos resultados.

II.3.1.2.- <u>Proposición.</u>

$$S_a^m M_a \subset J_a$$

Demostración

Sea $h \in S_a^m M_a$, $h = fg$, $f \in M_a$, $g \in S_a^m$. Basta probar que h es de J_a pués los elementos de $S_a^m M_a$ son sumas finitas de elementos como h.

Sea $|\alpha| \leq m$, se tiene que $D^\alpha h(a) = 0$ ya que $S_a^m M_a \subset S_a^m$.

Sea ahora $|\alpha| = m$, tenemos:

$$\frac{|D^\alpha h(x) - D^\alpha h(y)|}{d(x,y)} =$$

$$= \left| \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \frac{D^\gamma f(x) D^{\alpha-\gamma} g(x) - D^\gamma f(y) D^{\alpha-\gamma} g(y)}{d(x,y)} \right| \leq$$

$$\leq \left| f(x) \frac{D^\alpha g(x) - D^\alpha g(y)}{d(x,y)} \right| + \left| D^\alpha g(y) \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)} \right| +$$

$$+ \sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left| D^\gamma f(x) \frac{D^{\alpha-\gamma} g(x) - D^{\alpha-\gamma} g(y)}{d(x,y)} + \right.$$

$$\left. + D^{\alpha-\gamma} g(y) \frac{D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)}{d(x,y)} \right| \leq |f(x)| . \|g\| + |D^\alpha g(y)| . \|f\| +$$

$$+ \sum_{0 < \gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left| |D^\gamma f(x) \sum_{|\delta|=1} |D^{\alpha-\gamma+\delta} g(\xi)| + |D^{\alpha-\gamma} g(y)| . \|f\| \right|$$

En donde he aplicado el teorema del valor medio a $D^{\alpha-\gamma} g$ ya que lo que estamos haciendo es estudiar el comportamiento en una bola de centro a, puede pues suponer que x e y están en esa bola así como también ξ y además que ξ está en el segmento que una x con y. Cuando $x, y \to a$, también $\xi \to a$ y por lo tanto obtenemos:

$$|f(x)| \, \|g\| \xrightarrow[x \to a]{} 0 \text{ , ya que } f \in M_a$$

$$|D^\alpha g(y)| . \|f\| \xrightarrow[y \to a]{} 0 \text{ , ya que } g \in S_a^m$$

$$|D^\alpha f(x)| \sum_{|\delta|=1} |D^{\alpha-\gamma+\delta} g(\xi)| \xrightarrow[x,y \to a]{} 0 \text{, pues } g \in S_a^m$$

$$|D^{\alpha-\gamma} g(y)| . \|f\| \xrightarrow[y \to a]{} 0 \text{ , pues } g \in S_a^m$$

De ahí

$$\frac{D^{\alpha}h(x)-D^{\alpha}h(y)}{d(x,y)} \xrightarrow[x,y\to a]{} 0$$

y por lo tanto $h\in J_a$.

II.3.1.3.- Corolario

$(S_a^m)^2\subset J_a$

II.3.1.4.-Proposición

Los subespacios cerrados comprendidos entre J_a y S_a^m son ideales primarios en a.

Demostración

Sea L un subespacio cerrado y $J_a\subset L\subset S_a^m$. Veamos que L es un ideal.

Sea $f\in L$ y $h\in D(m)$. Se tiene que $h-h(a)$ es de M_a, de ahí $(h-h(a))f\in S_a^m M_a\subset J_a\subset L$, luego $hf-h(a)f\in L$, pero $h(a)f$ es de L, por ser éste un subespacio, de ahí hf es de L y hemos terminado.

II.3.1.5.-Proposición

$S_a^i M_a\subset S_a^{i+1}$

Demostración

Sea $h = fg$, $f\in S_a^i$, $g\in M_a$. Si $|\alpha|\leq i$, se tiene que $D^{\alpha}h(a) = 0$ pues $S_a^i M_a\subset S_a^i$.

Sea ahora $|\alpha|= i+1$, tenemos:

$$D^{\alpha}h(a) = \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma}D^{\gamma}f(a)D^{\alpha-\gamma}g(a)$$

si $\gamma<\alpha$, $D^{\gamma}f(a) = 0$ pues entonces $|\gamma|\leq i$. Si $\gamma=\alpha$ entonces $g(a) = 0$ pues g es de M_a y por tanto todos los sumandos son nulos.

II.3.1.6.-Corolario

Los subespacios cerrados comprendidos entre S_a^i y S_a^{i+1} son ideales primarios en a.

Demostración

Igual que la de la Proposición II.3.1.4.- pero en lugar de aplicar la proposición II.3.1.2.- se aplica la proposición II.3.1.5.-.

II.4.- Derivaciones e ideales primarios asociados.

II.4.0.- Introducción

En esta sección se estudian dos problemas distintos.

En primer lugar, en el párrafo II.4.1.- Se definen las derivaciones puntuales de orden $m+1$ sobre le álgebra $D(m)$, por analogía con el caso $m=0$ que es el tratado por Sherbert (1). En el caso $m=0$, las derivaciones puntuales en a K quedan caracterizadas como funcionales definidas por parejas de sucesiones de elementos de K, ambas con límite a. En nuestro caso veremos que esa caracterización no es válida. Igualmente, en ese párrafo, se estudian algunas propiedades de esas derivaciones.

Algunas de estas derivaciones cumplen la regla de Leibniz. La existencia y la construcción de derivaciones de ese tipo se estudia en el párrafo II.4.2.-.

En segundo lugar, en el párrafo II.4.3.- se estudian los ideales primarios contenidos en S_a^m. Recuérdese que en la sección II.3.- se han estudiado los ideales primarios comprendidos entre S_a^{i+1} y S_a^i para $0 \leq i \leq m-1$ y los ideales primarios comprendidos entre J_a y S_a^m. Esos ideales primarios eran allí los subespacios cerrados comprendidos entre esas dos parejas. Vamos a estudiar aquí las relaciones que existen entre las derivaciones que hemos caracterizado previamente y los ideales primarios contenidos en S_a^m. Los ideales primarios contenidos en S_a^m quedarán caracterizados como los conjuntos de funciones sobre los que se anulan ciertos conjuntos de derivaciones. En particular, se caracteriza en términos de las derivaciones, el ideal primario I_a en el punto a K asociado a un ideal cerrado I, al menos para algunos puntos a de K: aquellos en los que se anulan todas las funciones de I así como todas sus derivadas hasta el orden m inclusive.

En el párrafo II.4.4.- se comprueba que las derivaciones que hemos llamado de Leibniz son suficientes para caracterizar esos ideales primarios asociados a un ideal cerrado I.

II.4.1.- Derivaciones de orden m + 1.

II.4.1.0.- Definiciones y planteo del problema.

Sea a un punto no aislado de K. Una derivación de orden m + 1 en el punto a sobre el álgebra D(m) es un funcional lineal y continuo φ sobre D(m) que se anule sobre J_a y sobre las funciones constantes.

La existencia de funcionales de ese tipo viene asegurada por el Teorema de Hahn-Banach; más adelante encontraremos algunas que cumplen condiciones especiales.

Llamaremos D_a al conjunto de tales elementos y a ellos simplemente derivaciones.

Se tiene que $D_a = (J_a \oplus C)^{\perp}$ con lo que D_a es un subespacio cerrado de D(m)'.

Sea α un multiíndice con $|\alpha| = m$. Consideremos las sucesiones $(x_n, y_n) \to (a,a)$ con $(x_n, y_n) \neq (a, a)$, $x_n \neq y_n$. Para cada sucesión de ese tipo consideremos los siguientes funcionales sobre al álgebra D(m):

$$X_n^{\alpha}: f \longrightarrow \frac{D^{\alpha}f(x_n) - D^{\alpha}f(y_n)}{d(x_n,y_n)}$$

X_n^{α} es lineal y además $|X_n^{\alpha}f| \leq \|D^{\alpha}f\|_d \leq \|f\|$, de donde X_n^{α} es continua para cada $n \in N$. Se tiene además:

$$\|X_n^{\alpha}\| = \sup \{|X_n^{\alpha}f| ; \|f\| \leq 1\} \leq 1$$

con lo que X_n está en la bola unidad de D(m)', llamemos S a esa bola unidad.

Sea X_a^{α} el conjunto de los puntos de acumulación débiles de las sucesiones $\{X_n\}$ con $(x_n,y_n) \to (a,a)$, $x_n \neq y_n$. X_a^{α} es no vacio y está contenido en S, ya que ésta es debilmente compacta en D(m)'.

II.4.1.1.- Proposición

X_a es una parte de D_a.

Demostración

Basta ver que los elementos de X_a^α se anulen sobre $J_a = \overline{M_a^{m+2}}$ y sobre las funciones constantes.

Está claro que se anulan sobre las constantes y por ser funcionales continuos es suficiente ver que se anulan sobre M_a^{m+2}.

Sea pues f un elemento de M_a^{m+2}, $f = f_1 \cdot \, . \, f_{m+2}$, con f_i de M_a.

Sea X un elemento de X_a^α. X es un punto de acumulación débil de una sucesión $\{X_n^\alpha\}$. Sea $\{X_{n'}^\alpha\}$ una subsucesión convergente a X y sea $(x_{n'}, y_{n'}) \to (a,a)$ la subsucesión correspondiente. Tenemos:

$$X(f) = \lim \frac{D^\alpha f(x_{n'}) - D^\alpha f(y_{n'})}{d(x_{n'}, y_{n'})}$$

Por comodidad, a partir de ahora pondremos n en lugar de n'.

Pero tenemos que:

$$D^\alpha f = \sum_{\sum_{i=1}^{m+2} \alpha_i = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \ldots \alpha_{m+2}!} D^{\alpha_1} f_1 \ldots D^{\alpha_{m+2}} f_{m+2}$$

Ahora bien, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m+2} = \alpha$ y $|\alpha| = m$, de ahí en cada sumando hay al menos dos de las α_i que son nulas. Por tanto cada sumando de esa expresión es de la forma ghu, en donde g y h son funciones de D(m), además $g, h \in M_a$, y u es de la forma

$$u = h_1 \cdot \, . \, h_m = D^{\delta_1} g_1 \cdot \, . \, D^{\delta_m} g_m \quad \text{con} \quad \delta_1 + \ldots + \delta_m = \alpha$$

y $g_i \in M_a$.

El cálculo de Xf se reduce pues al de los límites:

$$\lim \frac{(ghu)(x_n) - (ghu)(y_n)}{d(x_n,y_n)}$$

Tenemos:

$$\frac{(ghu)(x_n) - (ghu)(y_n)}{d(x_n,y_n)} = g(x_n)h(x_n)\,\frac{u(x_n) - u(y_n)}{d(x_n,y_n)} \quad +$$

$$+\ g(x_n)\,\frac{h(x_n) - h(y_n)}{d(x_n,y_n)}\,u(y_n) + \frac{g(x_n) - g(y_n)}{d(x_n,y_n)}\,h(y_n)u(y_n)$$

Vamos a ver que el límite de estos tres sumandos es cero y por lo tanto que $X(f) = 0$.

Primer sumando:

$$\frac{\Delta_{x_n - y_n} u(y_n)}{d(x_n,y_n)} = \sum_{i=1}^{m} h_1(y_n)\ldots h_{i-1}(y_n)\,\frac{\Delta_{x_n - y_n} h_i(y_n)}{d(x_n,y_n)}\,h_{i+1}(x_n)\ldots h_m(x_n)$$

Y aplicando el teorema del valor medio, lo que puedo hacer pues puedo suponer que estoy en una bola de centro a, nos queda:

$$\frac{\left|\Delta_{x_n - y_n} u(y_n)\right|}{d(x_n,y_n)} \leq m\|g\|\ldots\|g_m\|$$

Y de ahí obtenemos:

$$\left|g(x_n)h(x_n)\,\frac{u(x_n) - u(y_n)}{d(x_n,y_n)}\right| \leq |g(x_n)|\,|h(x_n)|\,m\|g_1\|\ldots\|g_m\|$$

que tiende a cero si $x_n \to a$, ya que g y h son de M_a.

Segundo sumando:

$$\left|g(x_n)\ \frac{h(x_n) - h(y_n)}{d(x_n,y_n)}\ u(y_n)\right| \leq |g(x_n)|\,\|h\|\|g_1\|\cdots\|g_m\|$$

Que también tiende a cero si $x_n \to a$ ya que $g \in M_a$.

Tercer sumando:

$$\left|\frac{g(x_n) - g(y_n)}{d(x_n,y_n)}\ h(y_n)u(y_n)\right| \leq \|g\|\,|h(y_n)|\,\|g_1\|\cdots\|g_m\|$$

que también tiende a cero si $y_n \to a$ pués $h \in M_a$.

De ahí que X se anula sobre J_a y por tanto X es de D_a.

II.4.1.2.- Proposición

Sea ω un multiíndice con $|\omega| = m+1$ y sea α un multiíndice con $|\alpha| = m$ y $\alpha \leq \omega$. Existen derivaciones en X_a^α tales que se anulan sobre todos los polinomios $(x-a)^\gamma$ con $|\gamma| \leq m$ y el único polinomio de grado $m+1$ sobre el que no se anulan es $(x-a)^\omega$.

Demostración

Sea $\delta = \omega - \alpha$. Por simplicidad pondremos $\delta = (1,0,\ldots,0)$.

Tomemos las sucesiones:

$x_j = (x_j^1, a^2,\ldots,a^n)$ con $x_j^1 \to a^1$

$y_j = a$

siendo $a = (a^1,\ldots,a^n)$ y $x_n^1 \neq a^1$.

Sea $\{X_j^\alpha\}$ la sucesión de funcionales asociada a (x_j,y_j) y sea X un punto de acumulación de $\{X_j^\alpha\}$, sea $\{X_i^\alpha\}$ una subsucesión convergente a X.

X es un elemento de X_a^α que se anula sobre todo polinomio $(x-a)^\beta$ con $|\beta| \leq m$ puesto que $D^\alpha(x-a)^\beta = k\delta_{\alpha\beta}$, $k \in R$.

Ahora bien:

$$X((x-a)^\omega) = \lim \frac{(D^\alpha(x-a)^\omega)(x_i)-(D^\alpha(x-a)^\omega)(y_i)}{d(x_i,y_i)}$$

pero $D^\alpha(x-a)^\omega = \lambda(x-a)^\delta$, con $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$.

De ahí:

$$X((x-a)^\omega) = \lim \frac{\lambda(x_i^1-a^1)}{d(x_i,a\ )} = \lambda(\pm 1) \neq 0$$

en donde el signo más o menos depende de la subsucesión elegida.

Sea ahora $|\gamma| = m+1$ y $\gamma \neq \omega$, facilmente se obtiene que $X((x-a)^\gamma)=0$ pues entonces $D^\alpha(x-a)^\gamma = \mu(x-a)^{\gamma-\delta}$ que se anula en $\{x_i\}$ y en $\{y_i\}$.

II.4.1.3.- <u>Comentario</u>: Sea $X_a = \bigcup_{|\alpha|=m} X_a^\alpha$ y sea V_a el cierre débil del subespacio engendrado por X_a en $D(m)'$. Obsérvese que en nuestra álgebra $D(m)$, se verifica que $V_a \subset D_a$ pero no es cierto que $V_a = D_a$, como sucede en el caso $D(0)$ (Véase Sherbert (1)). En efecto, considérese $\varphi = (\partial/\partial x_1)_a$. Claramente $\varphi \in D_a$ pero $\varphi \notin V_a$, ya que todo elemento de V_a se anula sobre las funciones $f \in D(m)$ tales que $D^\alpha f = 0$ para todo $|\alpha| = m$ y φ no lo hace (basta tomar $f(x) = (x_1-a_1)$ que es de $D(m)$, todo V_a se anula sobre f y sin embargo $\varphi(f) = 1$).

II.4.2.- <u>Derivaciones de Leibniz</u>

II.4.2.0.- <u>Definiciones</u>

En la proposición II.4.1.2.- hemos probado la existencia de derivaciones especiales enD_a para cada ω escogida con la condición $|\omega| = m+1$. Al conjunto de esas especiales, dada ω, le llamaremos D_a^ω. Los elementos de D_a^ω son pues derivaciones de orden $m+1$ que se anulan sobre todo los polinomios $(x-a)^\alpha$ con $|\alpha| \leq m$ y el único polinomio de ese tipo de grado $m+1$ sobre el que no se anulan es $(x-a)^{\omega}$.

Vamos a ver que los elementos de D_a verifican la regla de Leibniz salvo una constante.

A los elementos de D_a les llamaremos derivaciones de tipo ω.

II.4.2.1.- Proposición

Sea ω un multiíndice con $|\omega| = m+1$ y sea X un elemento de D_a^{ω}. Sea $X((x-a)^{\omega}) = \lambda_{\omega} \neq 0$. Sea $X_{\omega} = \frac{\omega!}{\lambda_{\omega}} X$. X_{ω} es una derivación en a de tipo ω y que verifica:

$$X_{\omega}(fg) = \sum_{0 \leq \beta \leq \omega} \binom{\omega}{\beta} D_a^{\beta} f \, D_a^{\omega-\beta} g$$

en donde:

$$D_a^0 f = f(a), \quad D_a^{\gamma} f = D^{\gamma} f(a) \quad \text{si } 0 \leq \gamma \leq \omega$$

$$D_a^{\omega} f = X_{\omega} f$$

Demostración

Sean f, $g \in D(m)$, se tiene

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D f(a)}{\alpha!} (x-a)^{\alpha} + R_m^a(f) = T_m^a(f) + R_m^a(f)$$

$$g(x) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{D g(a)}{\beta!} (x-a)^{\beta} + R_m^a(g) = T_m^a(g) + R_m^a(g)$$

En donde $D^{\gamma}(R_m^a(f))(a) = D^{\gamma}(R_m^a(g))(a) = 0$, si $|\gamma| \leq m$.

Además, por ser X de D_a^{ω}, se verifica que:

$$X(f) = X(R_m^a(f)) \qquad\qquad X(g) = X(R_m^a(g))$$

ya que X anula sobre $(x-a)^{\gamma}$ con $|\gamma| \leq m$.

Se tiene además:

$$f(x)g(x) = T_m^a(f)T_m^a(g) + T_m^a(f)R_m^a(g) + T_m^a(g)R_m^a(f) + R_m^a(f)R_m^a(g).$$

Veamos cuanto vale X sobre fg. Ya que X es lineal veamos lo que vale sobre cada sumando:

a) $X(R_m^a(f)R_m^a(g)) = 0$

Ya que tanto $R_m^a(f)$ como $R_m^a(g)$ son de S_a^m, luego su producto es de $(S_a^m)^2$ que, por el corolario II.3.1.3., está contenido en J_a, de ahí X se anula sobre ese producto por ser una derivación.

b) $X(T_m^a(f)R_m^a(g)) = f(a)X(R_m^a(g)) = f(a)X(g)$

En efecto, se tiene:

$$T_m^a(f)R_m^a(g) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} ((x-a)^\alpha R_m^a(g))$$

En donde $(x-a)^\alpha R_m^a(g) \in M_a S_a^m$, que por la proposición II.3.1.2.- está contenido en J_a si $|\alpha| \geq 1$, con lo que en estos casos X se anula sobre esos sumandos, y por tanto queda:

$$X(T_m^a(f)R_m^a(g)) = X(f(a)R_m^a(g)) = f(a)X(R_m^a(g)) = f(a)X(g)$$

c) $X(T_m^a(g)R_m^a(f)) = g(a)X(R_m^a(f)) = g(a)X(f)$

Por los mismos argumentos que b).

d) Veamos como queda el último sumando:

$$X(T_m^a(f)T_m^a(g)) = X((\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha)(\sum_{|\beta| \leq m} \frac{D^\beta g(a)}{\beta!} (x-a)^\beta)) =$$

$$= X(\sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} \frac{D^\alpha f(a) D^\beta g(a)}{\alpha!\beta!} (x-a)^{\alpha+\beta}) =$$

$$= \sum_{|\alpha+\beta| = m+1} \frac{D^\alpha f(a) D^\beta g(a)}{\alpha!\beta!} X((x-a)^{\alpha+\beta}) =$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=\omega} \frac{D^{\alpha}f(a)D^{\beta}g(a)}{\alpha!\beta!} X((x-a)^{\omega}) =$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=\omega} \frac{D^{\alpha}f(a)D^{\beta}g(a)}{\alpha!\beta!} \lambda_{\omega}$$

$$= \sum_{0<\alpha<\omega} \frac{D^{\alpha}f(a)D^{\omega-\alpha}g(a)}{\alpha!(\omega-\alpha)!} \lambda_{\omega}$$

Por lo tanto tenemos:

$$X(fg) = f(a)X(g) + \sum_{0<\alpha<\omega} \frac{D^{\alpha}f(a)D^{\omega-\alpha}g(a)}{\alpha!(\omega-\alpha)!} \lambda_{\omega} + g(a)X(f)$$

Sea ahora $X_{\omega} = \frac{\omega!}{\lambda_{\omega}} X$, se tiene:

$$X_{\omega}(fg) = f(a)X_{\omega}(g) + \sum_{0<\alpha<\omega} \frac{\omega!}{\alpha!(\omega-\alpha)!} D^{\alpha}f(a)D^{\omega-\alpha}g(a) +$$

$$+ g(a)X_{\omega}(f)$$

que es lo que queríamos demostrar.

II.4.3.- Ideales primarios contenidos en S_a^m

II.4.3.0.- Definiciones (a es un punto de K)

Sea I un ideal cerrado de D(m), llamaremos:

$$D_a(I) = I^{\perp} \cap D_a$$

$D_a(I)$ es un subespacio debilmente cerrado de D(m)'.

Si H es un subconjunto de D(m)', llamaremos:

$$I_a(H) = H^{\perp} \cap S_a$$

$I_a(H)$ es un subespacio cerrado contenido en S_a^m.

Si I es un ideal cerrado de D(m), llamaremos:

$$H^p(I) = \{x \in K \,;\, D^\alpha f(x) = 0 \;,\; |\alpha| \leq p \;,\; f \in I\}$$

para $p = 0,1,\ldots,m$. Si $b \in H^p(I)$ entonces $I \subset S_b^p$.

II.4.3.1.- Proposición

$$J_a = D_a^\perp \cap S_a^m = I_a(D_a)$$

Demostración

Sea $J = D_a^\perp \cap S_a^m$, se tiene que $J_a \subset D_a^\perp$ y también $J_a \subset S_a^m$, de ahí $J_a \subset J \subset S_a^m$, de donde J es un subespacio cerrado compren dido entre J_a y S_a^m , de ahí J es un ideal cerrado y primario en $a \in K$, de acuerdo con la proposición II.3.1.4.-.

Para ver la contención al revés, vamos a ver que si f no está en J_a, tampoco está en J. Sea pues $f \notin J_a$. Por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal y continuo sobre D(m) tal que se anula en J_a y en los polinomios de grado menor o igual que m en (x-a), pero que no se anula en f. Sea X tal funcional. Por existir X, tenemos que f no es de $D_a^\perp$, luego no es de J.

Obsérvese que X no existiría si f fuera un polinomio de grado menor o igual que m en (x-a), pero en tal caso f no está en S_a^m de donde f no está en J y ya habríamos terminado.

II.4.3.2.- Proposición

Sea H un subconjunto de D_a. I(H) es un ideal primario en $a \in K$.

Demostración

Sabemos que $I_a(H) = H^\perp \cap S_a^m$. Pero $J_a \subset I_a(H)$, ya que $H \subset D_a$, de ahí $D_a^\perp \subset H^\perp$ y por tanto:

$$D_a^{\perp} \cap S_a^m = J_a \subset H^{\perp} \cap S_a^m = I_a(H)$$

Por lo tanto, $I_a(H)$ es un subespacio de $D(m)$, debilmente cerrado y comprendido entre J_a y S_a^m. Por la proposición II.3.1.4.-, $I_a(H)$ es un ideal primario en $a \in K$.

II.4.3.3.- <u>Proposición</u>

Sea I un ideal cerrado de $D(m)$ y sea $a \in H^m(I)$. Se tiene que $I_a = I_a(D_a(I))$, siendo I_a el ideal primario asociado a I en a.

<u>Demostración</u>

Sea $J = I_a(D_a(I)) = D_a(I)^{\perp} \cap S_a^m = (I^{\perp} \cap D_a)^{\perp} \cap S_a^m$

a) J es un ideal primario y cerrado en a, de acuerdo con la proposición II.4.3.2.-.

b) $I \subset J$, pués $I \subset S_a^m$ ya que $a \in H^m(I)$ y además $I \subset D_a(I)^{\perp}$

c) Falta ver que J es mínimo entre los que cumplen las condiciones a) y b).

Sea N un ideal cerrado y primario en a tal que $I \subset N \subset J$, veamos que $N = J$.

Para ello basta ver que si f no está en N, tampoco está en J.

Sea $f \notin N$, entonces f no es de I ni es de J_a, pues N es primario y J_a es el mínimo de los primarios.

Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal y continuo X, nula sobre J_a, nulo sobre I y sobre los polinomios en $(x-a)$ de grado menor o igual que m, pero no nulo sobre f, de ahí f no está en $D_a^{\perp}$ y por tanto f no está en J.

Obsérvese que X no existiría si f fuera un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual que m, pero en tal caso f no es de S_a^m, luego f no está en J y habríamos terminado.

Comentario: Mediante estas proposiciones quedan determinados los ideales primarios asociados a un ideal cerrado I, en los puntos de $H^m(I)$. La interpretación es clara: Si $a \in H^m(I)$, I_a son todas las funciones de D(m) sobre las que se anulan todas las derivaciones que se anulan sobre los elementos de I.

II.4.4.- Ideales primarios contenidos en S_a^m y derivaciones de Leibniz.

II.4.4.0.- Definiciones.

Sea I un ideal cerrado de D(m) y sea $a \in H^m(I)$. Mediante el espacio D_a de las derivaciones de orden $m+1$ en el punto $a \in K$ ha quedado determinado el ideal primario asociado a I en el punto a. Vamos a ver que no es necesario tomar todo el espacio D_a sino solamente las derivaciones de tipo ω cuando ω va recorriendo todos los multiíndices tales que $|\omega| = m+1$.

Sea así $C_a = \bigcup_{|\omega| = m+1} D_a^\omega$, llamaremos D_a^T al cierre débil del subespacio de D(m) engendrado por C_a. Claramente se tiene que $D_a^T \subset D_a$.

Si I es un ideal cerrado, llamaremos:

$$D_a^T(I) = I^\perp \cap D_a^T$$

Tenemos así las siguientes proposiciones:

II.4.4.1.- Proposición

$$J_a = I_a(D_a^T) = D_a^{T^\perp} \cap S_a^m$$

II.4.4.1.- Proposición

Si I es un ideal cerrado de D(m) y $a \in H_m(I)$, se tiene que

$$I_a = I_a(D_a^T(T))$$

Demostración

La demostración de estas dos proposiciones se hace exactamente igual que la demostración de las proposiciones II.4.3.1.- y II.4.3.3.- salvo que el funcional allí construido ha de ser de D_a^T y no sólo de D_a. Para ello basta imponer a X que no se anule sobre $(x-a)^\omega$ para un cierto ω con $|\omega| = m+1$, cosa que siempre podemos hacer. En el caso en que la función f de que se habla allí sea de la forma $f(x) = (x-a)^\gamma$ con $|\gamma| = m+1$, hay que tomar precisamente $\omega = \gamma$ y todo sigue igual.

II.4.4.2.- Proposición

$$S_a^m = \overline{M_a^{m+1}}$$

Demostración

Tanto S_a^m como $\overline{M_a^{m+1}}$ son primarios en a, de ahí:

$$\overline{M_a^{m+1}} = I_a(D_a^T(\overline{M_a^{m+1}})) \qquad\qquad S_a^m = I_a(D_a^T(S_a^m))$$

Pero $D_a^T(\overline{M_a^{m+1}}) = \{0\}$, pues si una derivación es de un tipo ω, o una combinación lineal de esos tipos y se anula sobre todo los polinomios en (x-a) de grado $m+1$ es que es la derivación nula. Ahora bien si una de esas derivaciones se anula sobre $\overline{M_a^{m+1}}$ es que se anula sobre todos esos polinomios.

De ahí obtenemos:

$$\overline{M_a^{m+1}} = I_a(D_a^T(\overline{M_a^{m+1}})) = I_a(\{0\}) = \{0\}^\perp \cap S_a^m = S_a^m$$

como queríamos probar.

II.5.- Un teorema de síntesis espectral y consecuencias.

II.5.0.- Introducción

El propósito de esta sección es demostrar que en el álgebra D(m) se verifica la síntesis espectral en el siguiente sentido: Sea I un ideal cerrado de D(m) y para cada a de K sea $I_a = I + J_a$ el ideal primario asociado a I en el punto a de K.

Entonces:

$$I = \bigcap_{a \in K} I_a$$

El antecedente de este resultado es, al igual que en otros de nuestros problemas, que eso es lo que ocurre en el álgebra $C^m(K)$. En este caso hay otros precedentes: Este resultado está enunciado para el álgebra D(m) cuando $K = [0,1]$ en Daly-Downun, pero la demostración que dan creemos que no es correcta. El resultado también es cierto en el caso $m = 0$; la conjetura Sherbert (1) y lo prueban Glaeser (1) y Waelbroeck (1) por métodos distintos. Las referencias a Daly-Downun pueden verse también en la bibliografía final.

El método que usamos para probar este resultado es distinto del que usan ambos. Seguiremos el utilizado por Malgrange (1) para demostrar la síntesis espectral en el álgebra $C^m(K)$, aunque ligeramente modificado.

La demostración exige tres lemas previos: Dos de ellos permiten acotar uniformemente las normas de ciertas funciones de D(m) y en el tercero semejante al utilizado por Malgrange pero adecuado al álgebra D(m).

Como aplicación del resultado caracterizamos el ideal de nulidades de un cerrado F de K. Eso es el apartado II.5.2.-. La caracterización es muy semejante a la hecha en II.2.2.- para el ideal de nulidades de un punto de K.

En toda esta sección, si I es un ideal cerrado de D(m), pondremos:

$$h(I) = \{x \in K;\ f(x) = 0,\quad f \in I\}$$

II.5.1.- Síntesis espectral en D(m)

II.5.1.1.- Lema

Sea $a \in K$ y sea $f \in D(m)$ tal que $D^{\alpha}f(a) = 0$ para todo $|\alpha| \leq m$. Sea r un número real positivo. Si x está en $B(a,r) \cap K$ y β es un multiíndice con $|\beta| \leq m$, se verifica:

$$|D^{\beta}f(x) \leq n^{m-|\beta|}d(x,a)^{m-|\beta|+1}\max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}f\|_{d}^{B(a,r)}$$

Demostración

Por comodidad pondremos $B = B(a,r)$.

Por inducción sobre $|\beta|$ tenemos:

a) Sea $|\beta| = m$, se tiene:

$$|D^{\beta}f(x)| = |D^{\beta}f(x) - D^{\beta}f(a)| \leq \|D^{\beta}f\|_{d}^{B}d(x,a) \leq d(x,a)\max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}f\|_{d}^{B}$$

b) Sea cierto hasta $|\beta| = h \leq m$ y sea $|\gamma| = h-1$, se tiene:

$$|D^{\gamma}f(x)| = |D^{\gamma}f(x) - D^{\gamma}f(a)| = \Big|\sum_{|\partial|=1} D^{\gamma+\partial}f(\xi)(x-a)\Big| \leq$$

$$\leq n.n^{m-|\gamma|-|\partial|}d(x,a)^{m-|\gamma|-|\partial|+1}\max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}f\|_{d}^{B}d(x,a)$$

$$= n^{m-|\gamma|}d(x,a)^{m-|\gamma|+1}\max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}f\|_{d}^{B}$$

Como queríamos demostrar.

II.5.1.2.- Lema

Sea f de J_a, para todo $|\beta| \leq m$ se verifica:

$$D^{\alpha}f(x)/d(x,a)^{m-|\beta|+1} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Esto es: Dado $\varepsilon > 0$, existe un número real positivo r, tal que si $x \in B(r,a)$ entonces:

$$|D^{\beta}f(x)|/d(x,a)^{m-|\beta|+1} < \varepsilon$$

Demostración

Para todo número real positivo r, se verifica que:

$$|D^{\beta}f(x)|/d(x,a)^{m-|\beta|+1} \leq n^{m-|\beta|} \max_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha}f\|_d^{B(a,r)}$$

pero:

$$\|D^{\alpha}f\|_d^{\acute{B}(a,r)} = \sup\{|D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}f(y)|/d(x,y);\ x,y \in B(a,r)\}_{x \neq y}$$

Y por ser f de J_a se verifica que:

$$|D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}f(y)|/d(x,y) \xrightarrow[x,y \to a]{} 0$$

esto es $\|D^{\alpha}f\|_d^{B(a,r)} \xrightarrow[r \to 0]{} 0$

Con lo que hemos terminado el lema.

II.5.1.3.- Lema

Sea I un ideal cerrado de D(m), $\widetilde{I} = \bigcap_{z \in K} (I + J_z)$.

Sea f de $\widetilde{I}$, esto es, para cada z de K, existe f_z del ideal I tal $f-f_z$ está en J_z.

Sea $H_p = \{x \in K; \|f-f_x\| \leq p\}$, $p \in N$.

Dado $\epsilon > 0$, existen funciones $\phi \in D(m)$ y $g \in I$ tales que $\phi = 1$ en un entorno abierto de H_p y $\|\phi\, f-g\| < \epsilon$

Demostración

Consideremos R^n dividido en cubos de lado d y tomemos los cubos abiertos de lado 2d y con el mismo centro. Sea $\mathcal{P}$ ese recubrimiento abierto de R^n. Sea $\{\phi_i;\ i \in \mathcal{P}\}$ una partición de la unidad de clase C^∞ subordinada a $\mathcal{P}$ y tal que para $|\alpha| \leq m+1$ se verifique:

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} |D^\alpha \phi_i(x)| \leq C/d^{|\alpha|}$$

en donde C es una constante que depende sólo de m y de n.

Sea $\mathcal{Q}$ la familia de los cubos de $\mathcal{P}$ que cortan a H_p. Claramente $\mathcal{Q}$ es finita pues H_p está contenido en K.

Sea $j \in \mathcal{Q}$, $a_j \in j \cap H_p$, $j \subset B(a_j, 2d\sqrt{n})$. Sea $\phi = \sum_{j \in \mathcal{Q}} \phi_j$, $g = \sum_{j \in \mathcal{Q}} \phi_j f_{a_j}$.

Por comodidad pondremos $f_j = f_{a_j}$. Sea además: $h = \phi f - g = \sum_{\mathcal{Q}} \phi_j (f - f_j)$.

Desde luego $\phi = 1$ en un entorno de H_p, $g \in I$ pues $f_j \in I$ y $\phi_j \in C(K) \subset D(m)$.

Vamos a calcular la norma de $h = \phi f - g$. Por comodidad pondremos $h_j = f - f_j$, de ahí $h = \sum_{\mathcal{Q}} \phi_j h_j$.

Sea x un punto de K y sea $|\beta| \leq m$, se tiene:

$$|D^\beta h(x)| = |D^\beta (\sum_{\mathcal{Q}} \phi_j h_j)(x)| =$$

$$= |\sum_{\mathcal{Q}} \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^\alpha \phi_j(x) D^{\beta-\alpha} h_j(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \sum_{\mathcal{Q}} D^\alpha \phi_j(x) D^{\beta-\alpha} h_j(x)| \qquad (^*)$$

Si $x \notin \bigcup_{Q} j$, $\phi_j(x) = 0$ y sus derivadas, basta pues considerar los puntos x de $\bigcup_{Q} j$. Para esos $j \in Q$, sabemos que $j \in B(a_j, 2d\sqrt{n}) = B_j$, de donde:

$$|D^{\beta-\alpha}h_j(x)| \leq n^{m-|\beta|+|\alpha|}d(x,a_j)^{m-|\beta|+|\alpha|+1}\max_{|\gamma|=m}\|D^\gamma h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq n^{m-|\beta|+|\alpha|}d(x,a_j)^{m-|\beta|+|\alpha|+1}p \leq$$

$$\leq n^{m-|\beta|+|\alpha|}p(2d\sqrt{n})^{m-|\beta|+|\alpha|+1} =$$

$$= \lambda p d^{m-|\beta|+|\alpha|+1}$$

en donde λ sólo depende de n y m.

De ahí, la expresión marcada con (*) se continúa en:

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta}\binom{\beta}{\alpha}\ (C/d^{|\alpha|})\lambda p d^{m-|\beta|+|\alpha|+1} = \mu d^{m-|\beta|+1}$$

Puesto que $|\beta| \leq m$, el exponente es siempre positivo, por tanto tomando d suficientemente pequeño obtengo:

$$\sum_{|\beta|\leq m}\|D^\beta h\|/\beta! < \varepsilon$$

Sea ahora $|\beta| = m$ y calculemos $\|D^\beta h\|_d$. Se tiene:

$$\|D^\beta h(x) - D^\beta h(y)| = |D^\beta(\Sigma\phi_j h_j)(x) - D^\beta(\Sigma\phi_j\, h_j)(y)| =$$

$$(**) \qquad = \Big|\sum_{\alpha\leq\beta}\binom{\beta}{\alpha}(\Sigma(D^\alpha\phi_j(x)D^{\beta-\alpha}h_j(x) - D^\alpha\phi_j(y)D^{\beta-\alpha}h_j(y)))\Big|$$

<u>Caso 1:</u> Ni x ni y pertenencen a $\bigcup_{Q} j$.

En este caso $\phi_j(x) = \phi_j(y) = 0$ así como sus derivadas, de ahí $D^\beta h(x) = D^\beta h(y) = 0$.

<u>Caso 2:</u> $x \notin \bigcup_{Q} j$, $y \in \bigcup_{Q} j$.

Se tiene que $D^\alpha\phi_j(y) = 0$, para todo α, de ahí nos queda $|D^\beta h(x)|$.

El punto x pertenece como máximo a un número finito de cubos, número que sólo depende de n. Todos los sumandos son nulos menos los de ese número finito. Para cada uno de los sumandos se tiene, de acuerdo con los lemas anteriores:

$$|D^{\alpha}\phi_j(x)D^{\beta-\alpha}h_j(x)| \leq |D^{\alpha}\phi_j(x)|n^{|\alpha|}d(x,a_j)^{|\alpha|+1}\max_{\gamma=m}\|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq (C/d^{|\alpha|})n^{|\alpha|}(2d\sqrt{n})^{|\alpha|+1}\max_{|\gamma|=m}\|D\, h_j\|_d^{B_j} =$$

$$= \mu\, d \max_{|\gamma|=m}\|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} \qquad (\hat{}\,\hat{}\,\hat{})$$

En donde μ es una constante que sólo depende de m y n.

Ahora bien, si x e y no pertenecen al mismo cubo del recubrimiento, como ocurre en este caso, existe un número real $\nu > 0$ tal que $d(x,y) > \nu d$. El número ν sólo depende de n. De aquí la expresión marcada por ($\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$) queda:

$$\leq \mu d(d(x,y)/\nu d) \max_{|\gamma|=m}\|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} = (\mu/\nu)\max_{|\gamma|=m}\|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j}\, d(x,y)$$

De acuerdo con el Lema II.5.1.2.-, existe $d > 0$ tal que

$$\max_{|\gamma|=m}\|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} < (\nu/\mu)\,\varepsilon$$

con lo que: $|D^{\beta}h(x) - D^{\beta}h(y)| < \varepsilon d(x,y)$

<u>Caso 3</u>: $x,y \in \cup_{Q} j$

a) x e y pertenecen ambos al mismo cubo i de Q.

En este caso la suma está extendida a lo sumo a todos los cubos que cortan a i. Para cada uno de ellos, que son en total un número finito que sólo depende de n, tenemos los casos 1.- y 2.- anteriores, o el caso de los cubos que cortan al cubo i que contengan a x y a y. Los dos primeros casos están resueltos anteriormente y para el tercero se tiene:

$$\left| \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} (D^\alpha \phi_j(x) D^{\beta-\alpha} h_j(x) - D^\alpha \phi_j(y) D^{\beta-\alpha} h_j(y)) \right| \leq$$

$$\sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} (|D^\alpha \phi_j(x)(D^{\beta-\alpha} h_j(x) - D^{\beta-\alpha} h_j(y))| +$$

$$+ |(D^\alpha \phi_j(x) - D^\alpha \phi_j(y)) D^{\beta-\alpha} h_j(y)|)$$

Consideremos por separado los dos sumandos. Para el primero tenemos:

$$\sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} |D^\alpha \phi_j(x)(D^{\beta-\alpha} h_j(x) - D^{\beta-\alpha} h_j(y))| =$$

$$= |\phi_j(x)(D^\beta h_j(x) - D^\beta h_j(y))| + \sum_{0 < \alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} |D^\alpha \phi_j(x)(D^{\beta-\alpha} h_j(x) - D^{\beta-\alpha} h_j(y))| \leq$$

$$\|D^\beta h_j\|_d^{B_j} d(x,y) + \sum_{0 < \alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} |D^\alpha \phi_j(x) \sum_{|\delta|=1} D^{\beta-\alpha+\delta} h_j(\xi)(x-y)^\delta| \leq$$

$$\leq \|D\ h_j\|_d^{B_j} d(x,y) + \sum_{0 < \alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} (C/d^{|\alpha|}) n^{|\alpha|-1} (2d\sqrt{n})^{|\alpha|-1+1} \max_{|\gamma|=m} \|D^\gamma h_j\|_d^{B_j} d(x,y)$$

$$\leq (1 + \eta) \max_{|\gamma|=m} \|D^\gamma h_j\|_d^{B_j} d(x,y)$$

En donde η es una constante que sólo depende de n y de m.

Existe d tal que max $\|D^\gamma h_j\|_d^{B_j} < \varepsilon/2(1 + \eta)$ con lo que este primer sumando nos queda menor que $(\varepsilon/2)\ d(x,y)$.

Para el segundo sumando tenemos:

$$\sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} |(D^\alpha \phi_j(x) - D^\alpha \phi_j(y)) D^{\beta-\alpha} h_j(y)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \Big| \sum_{|\delta|=1} D^{\alpha+\beta}\phi_j(\xi)(x-y)^{\delta} \Big| \; |D^{\beta-\alpha}h_j(y)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} (nC/d^{|\alpha|+1}) d(x,y) \; n^{|\alpha|} d(y,a_j)^{|\alpha|+1} \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\alpha}{\beta} (nC/d^{|\alpha|+1}) d(x,y) \; n^{|\alpha|} (2d\sqrt{n})^{|\alpha|+1} \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq \; p \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} \; d(x,y)$$

En donde p es una constante que sólo depende de n y de m.

Existe d tal que $\max\|D^{\gamma}h_j\|_d^{B_j} < \varepsilon/2p$, de acuerdo con el Lema II.5.1.2.-, con lo que ese segundo sumando nos queda menor que $(\varepsilon/2)d(x,y)$.

De acuerdo con todo esto, para un d suficientemente pequeño se tiene:

$$|D^{\beta}h(x) - D^{\beta}h(y)| \leq \varepsilon d(x,y)$$

para el caso en que ambos, x e y, pertenezcan al mismo cubo i de Q.

b) x e y no pertenecen ambos al mismo cubo de Q.

En este caso tenemos:

$$|D^{\beta}h(x) - D^{\beta}h(y)| \leq |D^{\beta}h(x)| + |D^{\beta}h(y)|$$

Y calculemos ahora cada sumando. Obsérvese que $D^{\beta}h(x) = 0$ salvo, a lo más, en los cubos a los que pertenecen x, que son un número finito que sólo depende de n. Para uno de esos cubos tenemos:

$$|D^{\beta}h(x)| = \Big| \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^{\alpha}\phi_j(x) D^{\beta-\alpha}h_j(x) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \; |D^{\alpha}\phi_j(x)| \; |D^{\beta-\alpha}h_j(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} (C/d^{|\alpha|}) n^{|\alpha|} d(x,a_j)^{|\alpha|+1} \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} (C/d^{|\alpha|}) n^{|\alpha|} (2d\sqrt{n})^{|\alpha|+1} \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq \lambda d \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j}$$

en donde λ sólo depende de m y de n.

La misma acotación obtengo para $|D^{\beta}h(y)|$. De ahí, tendríamos que sumar un número finito que sólo depende de n, nos queda:

$$|D^{\beta}h(x) - D^{\beta}h(y)| \leq 2\lambda d \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j} \leq$$

$$\leq 2\lambda d (d(x,y)/\nu d) \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j} =$$

$$= (2\lambda/\nu) \max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j}\, d(x,y)$$

De acuerdo con los resultados anteriores, existe d tal que

$$\max_{|\gamma|=m} \|D^{\gamma} h_j\|_d^{B_j} \leq \nu\varepsilon/2\lambda$$

con lo que

$$|D^{\beta}h(x) - D^{\beta}h(y)| < \varepsilon d(x,y)$$

De las desigualdades obtenidas en los casos 1,2 y 3 tenemos:

$$\|D^{\beta}h\|_d < \varepsilon \quad , \qquad |\beta| = m$$

Y por lo tanto:

$$\|\phi f - g\| < \varepsilon$$

para lo cual basta tomar una d suficientemente pequeña.

II.5.1.4.- Teorema (Síntesis espectral en D(m))

Sea I un ideal cerrado de D(m). Se verifica que: $I = \bigcap_{z \in K} (I + J_z)$

Demostración

Claramente el ideal I está contenido en esa intersección de ideales, de ahí que basta probar la contención al revés.

Por ser I un ideal cerrado, es suficiente probar que dado $\varepsilon > 0$ y $f \in \cap(I+J_z)$, existe una función g del ideal I tal que $\|f-g\| < \varepsilon$.

Para ello consideremos el siguiente enunciado: Para cada número natural p, existen funciones $\phi_p \in D(m)$, $g_p \in I$ tales que $\phi_p = 1$ en un entorno abierto U_p de H_p siendo $U_{p-1} \subset U_p$ y tales que $\|\phi_p f - g_p\| < \varepsilon$.

Supongamos probado este enunciado, en ese caso los U_p, con p natural, son un recubrimiento de K, de ahí $K \subset U_h$ para un cierto número natural h. De ahí, $\phi_h = 1$ en K y tendré:

$$\|f - g_h\| = \|\phi_h f - g_h\| < \varepsilon$$

con lo que habríamos terminado.

Vamos a probar ese enunciado por inducción. Para p = 1 es el lema anterior.

Supongámoslo cierto hasta p-1, esto es:Existen ϕ_{p-1}, g_{p-1} siendo $\phi_{p-1} \in I$, $\phi_{p-1} = 1$ en $U_{p-1} \supset U_{p-2}$ y $\|\phi_{p-1}f - g_{p-1}\| < \varepsilon$, $\phi_{p-1} \in D(m)$, $g_{p-1} \in I$.

Veámoslo para p. La función $(1 - \phi_{p-1})f$ pertenece a $\cap(I + J_z)$ ya que $(1 - \phi_{p-1})f_z \in I$ y además

$$(1 - \phi_{p-1})f - (1 - \phi_{p-1})f_z \in J_z.$$

Además se verifica que:

$$\|(1 - \phi_{p-1})f-(1 - \phi_{p-1})f_z\| \leq \|1 - \phi_{p-1}\| \, \|f - f_z\|$$

así pués, los puntos de H_p para la función f, son puntos de $H_{p\|1-\phi_{p-1}\|}$ para la función $(1 - \phi_{p-1})f$, de ahí aplicando el lema anterior, tengo:

Existen $\phi \in D(m)$, $g \in I$ tales que $\phi = 1$ en un abierto U, entorno de H_p, y además $\|(1 - \phi_{p-1})f - g\| < \varepsilon$.

Sea ahora:

$$\phi_p = \phi_{p-1} + \phi(1 - \phi_{p-1})$$

$$g_p = g + g_{p-1}$$

Se tiene:

Si $x \in U_{p-1}$, $\phi_{p-1} = 1$, de donde $\phi_p(x) = 1$

Si $x \in U$, $\phi(x) = 1$, de donde $\phi_p(x) = 1$

Así pués, $\phi_p = 1$ en un entorno abierto $U_p = U_{p-1} \cup U$ de H_p y además $U_{p-1} \subset U_p$.

La función g_p está en el ideal I pués ambas g y g_{p-1} son de I.

Por otra parte:

$$\|\phi_p f - g_p\| = \|(\phi_{p-1} + \phi(1 - \phi_{p-1}))f - g - g_{p-1}\| \leq$$

$$\leq \|\phi_{p-1}f - g_{p-1}\| + \|\phi(1 - \phi_{p-1})f - g\| < 2\varepsilon$$

con lo que hemos terminado.

II.5.1.5.- <u>Corolario</u>

En las mismas condiciones del teorema anterior y por ser D(m) un álgebra regular, se tiene:

$$I = \bigcap_{x \in h(I)} (I + J_x)$$

II.5.2.- Funciones planas en un compacto.

II.5.2.0.- Definiciones

Sea H un cerrado de K. El mínimo idela cerrado J_H tal que $h(J_H) = H$ es el cierre del ideal de las funciones nulas en un entorno de H.

Sean:

$$I_H = \bigcap_{x \in H} J_x$$

$$K_H = \{ f \in D(m) \; ; \; 1.- \; D^{\alpha} f(x) = 0 \; , \quad x \in H, \; |\alpha| \leq m$$

$$2.- \quad \frac{D^{\beta} f(x) - D^{\beta} f(y)}{d(x,y)} \xrightarrow[\substack{x,y \to H \times H \\ x \neq y}]{} 0$$

$$\text{para todo} \quad |\beta| = m \qquad \}$$

II.5.2.1.- Lema

K_H es un cerrado de D(m).

Demostración

La condición 1.- que define a K_H obliga a que sea un cerrado, veamos la condición 2.-.

Sea $C(K \times K - \Delta)$ el álgebra de las funciones continuas y acotadas en $K \times K - \Delta$, siendo Δ la diagonal de $K \times K$, a valores complejos. Sea β un multiíndice con $|\beta| = m$, consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{ccc} D(m) & \xrightarrow{\quad \Phi_\beta \quad} & C(K \times K - \Delta) \\ f & \longrightarrow & \dfrac{D^{\beta} f(x) - D^{\beta} f(y)}{d(x,y)} \end{array}$$

Tomando en $C(K \times K - \Delta)$ la norma del supremo, si f es de D(m), tenemos:

$$\|\Phi_\beta f\| = \sup_{x,y \in K \times K - \Delta} \left| \frac{D^{\beta} f(x) - D^{\beta} f(y)}{d(x,y)} \right| \leq \|f\|$$

de donde Φ_β es una aplicación continua.

Sea:

$$F_\beta = \Phi_\beta^{-1}\{g \in C(K \times K - \Delta);\ g(x,y) \xrightarrow[x,y \to H \times H]{} 0\}$$

F_β es un cerrado de $D(m)$ ya que es la antiimagen de un cerrado de $C(K \times K - \Delta)$ por una aplicación continua.

Tenemos además que:

$$K_H = \bigcap_{|\beta|=m} F_\beta$$

de donde K_H es un cerrado de $D(m)$.

II.5.2.2.- Teorema

$$J_H = I_H = K_H$$

Demostración

a) $J_H = I_H$

Se tiene que $h(J_H) = H$, de ahí que J_H es un ideal cerrado y por lo tanto:

$$J_H = \bigcap_{x \in H} (J_H + J_x)$$

Ahora bien, $J_H \subset J_x$, si $x \in H$, ya que ambos son cerrados y si f se anula en un entorno de H, se anula en un entorno de cualquier $x \in H$. De ahí:

$$J_H = \bigcap_{x \in H} J_x = I_H$$

b) $J_H = K_H$

Las funciones nulas en un entorno de H verifican las condiciones que definen a K_H y ya que éste es cerrado tenemos que contiene a J_H.

Por otra parte, K_H está contenido en J_x para todo x de H, de ahí:

$$K_H \subset \bigcap_{x \in H} J_x = J_H = I_H$$

de acuerdo con lo que hemos probado en a), y hemos terminado.

REFERENCIAS

CZIPSZER,J. & GEHER,L.

(1) Extension of functions satisfying a Lipschitz condition. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 6, (1955), 213-220.

DALY,J.T. & DOWNUM,P.B.

(1) A Banach algebra of functions with bounded n-th differences. Transac. Amer. Math. Soc., 223, (1976), 279-294.

FLETT,T.M.

(1) Extensions of Lipschitz functions. J. London Math. Soc. (2), 7, (1974), 604-608.

GLAESER,C.

(1) Synthese spcetrale des idéaux des fonctions lipschitziennes. C.R.Acad. Sc. Paris, 260, (8-II-1965), 1539-1542.

JOHNSON,J.A.

(1) Banach spaces os Lipschitz functions and vector valued Lipschitz functions. Trans. Amer. Math. Soc., 148, (1970), 147-169.

(2) Lipschitz functions spaces for arbitrary metrics. Bull. Amer. Math.Soc., 78,5,(1972),702-705.

(3) A note on Banach spaces of Lipschitz functions. Pacific. J. of Math., 58,2,(1975),475-482.

KUFNER,A., OLRICH,J., SVATOPLUK,F.

(1) Functions spaces, Noordhoff International Publishing, (1977)

MALGRANGE,B.

(1) Ideals of differentiable functions. Oxford University Press, (1966).

McSHANE,E.J.

(1) Extension of the range of functions. Bull. Amer. Math. Soc., 40, (1934), 837-842.

MINTY,G.J.

(1) On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Holder continuous and monotone functions. Bull. Amer. Math. Soc., 76, (1970), 334-339.

NAIMARK,M.A.

(1) Normed algebra. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, The Netherlands.

NARASIMHAN,R.

(1) Analysis on real and complex manifolds. North-Holland, Amsterdam (1968).

SCHONBECK,S.O.

(1) Extensions of nonlinear contractions. Bull. Amer. Math. Soc., 72,(1966), 99-101.

SHERBERT,D.

(1) The structure of ideals and point derivations in Banach algebras of Lipschitz functions. Trans. Amer. Math. Soc., 111, (1964), 240-272.

(2) Bamach algebras of Lipschitz functions. Pacific J. Math., 13,(1963), 1387-1399.

TOUGERON,J.C.

(1) Ideaux des fonctions differentiables. Springer-Verlag, (1972).

VALENTINE,F.A.

(1) On the extension of a vector function so as to preserve a Lipschitz condition. Bull. Amer. Math. Soc., 49, (143), 100-109.

WAELBROECK,L.

(1) Closed ideals of Lipschitz functions. Functions Algebras. (Proc.Internat. Sympos. Function Algebras Tulane Univ. (1965) Scott-Foresman. Chicago III, (1966) 322-325.

WHITNEY,H.

(1) Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc., 36, (1934), 63-89.

(2) On ideals of differentiable functions. Amer.J. Math., 70, (1948), 635-658.