Pub. Mat. UAB
Nº 24 Març 1981

BIFURCACIONS GENÈRIQUES D'ATRACTORS EN SISTEMES DE REACCIÓ I DIFUSIÓ.

Angel Calsina Ballesta

ABSTRACT.

In this work we write down in some detail the bifurcation theory of stationary states of reaction-diffusion equations.

First, we prove, adapting notes of looss on the Navier-Stokes equations, that under some weak hypothesis a reaction-diffusion equation defines a differentiable dynamical systems in the Sobolev space H^2 with some boundary conditions. Then it is proven that a rest point where the infinitessimal generator of the linear part of the system has a spectrum in the left hand plane is stable. We prove then that when , depending on a parameter, a simple eigenvalue crosses to the right hand plane, a bifurcation appears (generically). In the last chapter we propose a model for dune formation, which does not have the pretension of being faithful, but which illustrates how the theory given is useful.

Memòria presentada per a optar al grau de Llicenciat en Ciències Matemàtiques.
Director: Carles Perelló Valls.

INTRODUCCIÓ

Les equacions de reacció i difusió són de la forma

$$(*) \quad u_t = f(u) + d\Delta u$$

on u és una funció vectorial de t, el temps, i x, la posició en un domini espacial Ω. u_t és la derivada respecte a t de u, d és la matriu diagonal dels coeficients de difusió i Δ és la laplaciana aplicada a cada una de les components de u

Aquestes equacions serveixen de model per a fenòmens de la biologia i la química, quan, per una banda les espècies reaccionen entre elles a cada punt, i, per l'altra, es mouen cap a gradients negatius de concentració.

La majoria dels estudis fets fins ara d'aquests models es deuen a biòlegs i químics. L'any 1937 FISHER(*) va donar ja un model de reacció i difusió per a explicar la difusió de gens mutants. En els darrers anys, ens trobem una sèrie de treballs en que models d'aquest tipus són utilitzats per a explicar fenomens de morfogenesi , és a dir, de com una distribució homogènia de les espècies reactants es torna inestable, en variar un paràmetre, i es bifurca d'ella una solució estable no homogènia.

Entre aquests treballs destaquem els de SEGEL, GIERER-MEINHARDT, PRIGOGINE, NICOLIS-PRIGOGINE i MURRAY.

Els mètodes matemàtics són trets dels que ja eren utilitzats, sense una anàlisi rigurosa en l'estudi de fenòmens similars en hidrodinàmica, per exemple per CHANDRASEKHAR.

L'anàlisi matemàtica que dóna suport a aquests mètodes es basa en la teoria d'equacions parabòliques, i l'exposició més influent pot ser la de FRIEDMAN, encara que no estudia específicament els problemes esmentats.

El que dóna sentit a parlar d'estabilitat i bifurcació per a equacions

(*) Els noms en majúscula indiquen referències bibliogràfiques, que es troben al final del treball.

de reacció i difusió i, en general, per a equacions parabòliques, és que permeten definir, en un espai de funcions escaient, un (semi) sistema dinàmic, on es compta amb un gran bagatge de conceptes i mètodes. Entre els estudis que prenen aquest punt de vista, ens trobem els de Kilhofer i IOOSS sobre les equacions de Navier-Stokes.

Pel que fa a l'estudi matemàtic de les bifurcacions, destaquem els treballs de SATTINGER.

En el treball de PERELLÓ es planteja el problema de la fonamentació dels mètodes utilitzats en l'estudis dels fenòmens morfogenètics. Pretenem aquí assolir aquesta fita, adaptant els procediments de Friedman, Iooss i Sattinger a aquesta fonamentació.

Aquest treball consta de tres capítols. En el primer es demostra que l'equació (*) defineix un semisistema dinàmic, amotllant al nostre problema una demostració de Iooss.

En el segon capítol es senten les bases teòriques que permetran estudiar l'estabilitat dels punts d'equilibri de (*) i les seves posibles bifurcacions. El mètode utilitzat per a l'estudi de les bifurcacions és el conegut com a mètode de Liapunov-Schmidt.

Per últim, en el tercer capítol es dóna un model de reacció i difusió per a un fenòmen que pertany a un camp completament diferent dels esmentats: la formació de dunes en el desert. Aquest model no pretén explicar de forma realista el fenomen i, més que res, ha de servir com a exemple d'aplicació de les tècniques descrites en els capítols anteriors.

Per acabar, vull manifestar el meu agraïment al Dr. Carles Perelló per la forma en què ha dirigit aquest treball i per l'interés demostrat; així com a en Joan Solà-Morales i en Xavier Mora per les seves indicacions i suggeriments que tant m'han ajudat en la meva tasca. I vull també fer palés el meu reconeixement a tots els professors de la Secció de Matemàtiques de la U.A.B. que m'han brindat la seva ajuda i amistat.

CAPITOL I

EXISTÈNCIA, UNICITAT, REGULARITAT, DEPENDÈNCIA RESPECTE A CONDICIONS INICIALS.

INTRODUCCIÓ

Considerem sistemes d'equacions parabòliques de la forma

$$(1)\ \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(u)$$

on $u(x,t) \in \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$ obert connex acotat de $\mathbb{R}^n$ amb frontera $\partial\Omega$ regular (de classe C^2) i $t \in \mathbb{R}$;

d és un vector de m components $(d_1,\dots,d_m)$ tals que $d_i \geq 0\ \forall i$.

$d\Delta$ és un operador diagonal d'ordre $m \times m$ de manera que cada terme de la diagonal és $d_i\Delta$, on Δ representa l'operador laplacià $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

f és una aplicació suficientment regular entre $\mathbb{R}^m$ i $\mathbb{R}^m$.

Imposem la següent condició a la frontera per a la solució u:

$$(2)\ \frac{\partial}{\partial \nu} u(x,t) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

$\frac{\partial u}{\partial \nu}$ és, per definició, la derivada de u respecte al vector normal a $\partial\Omega$: $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \langle \operatorname{grad}_x u(x,t), \vec{n} \rangle$. Aquesta condició a la frontera correspon al que s'anomena problema de Neumann homogeni.

Imposem també condicions inicials per a la solució u:

$$(3)\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

$u_0(x)$ és una funció de Ω en $\mathbb{R}^m$

Donarem teoremes d'existència i unicitat de solucions per al problema de valors inicials i valors a la frontera (1), (2), (3) en certs espais de funcions i de continuïtat i diferenciabilitat respecte a les condicions inicials.

Notació

Denotem per $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ la completació en norma $H^2(\Omega)$ del conjunt $\{u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\}$

Siguin $D = (H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}))^m$, $H = (L^2(\Omega))^m$, $K = (H^1(\Omega))^m$ on els $H^k(\Omega)$ són els espais de Sobolev d'ordre k sobre $L^2(\Omega)$. En particular $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Sigui F l'aplicació induïda a D per f. És a dir, si $u \in D$, definim $F(u)(x) = f(u(x))$.

Demostrarem en aquest capítol que si $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ és de classe C^2, llavors F aplica D en K i és contínuament diferenciable de Frechet.

En aquesta situació resoldrem el següent problema de Cauchy, que és una versió particular, pero prou general, del (1) (2) (3).

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = d\Delta u + F(u) \\ u(0) = u_0 \in D \end{cases}$$

Direm que una aplicació u és solució de (4) si:

$$u \in C([0,T], D) \cap C^1([0,T], H)$$
$$u(0) = u_0$$
$$\frac{du}{dt} = d\Delta u + F(u)$$

Entenent $\frac{du}{dt} = \lim \frac{u(t+h)-u(t)}{h}$ en H.

Notem que mentre que a Δu les derivades són distribucionals, a $\frac{du}{dt}$ la derivada és l'habitual, pero amb valors a $H.d\Delta$ és l'operador diagonal definit abans.

Demostrarem doncs:

Teorema $\forall\, u_0 \in D$ existeix $T^*(u_0) > 0$ i una única solució de (4) definida per a tota $T < T^*(u_0)$. A més, si $T^* < \infty$, $\lim\limits_{T \to T^*} \sup\limits_{t \in [0,1]} |u|_D = \infty$

Teorema Per a cada $t < T_m(u_0)$, l'aplicació $F_t : D \to D$ que fa correspondre a $u_0 \in D$ la solució $u(t)$ de (4) és de classe C^2.

1. EQUACIÓ D'EVOLUCIÓ EN ABSTRACTE

En aquesta secció provarem els teoremes esmentats anteriorment per a equacions abstractes més generals que (4) seguint una demostració que es troba en el capítol VII de Iooss pero sense suposar analiticitat per a la F.

Siguin K i H dos espais de Hilbert, tals que K esta contínuament encabit en H. Suposem un operador linial tancat L definit a H amb domini dens D. Suposem que L genera un semigrup analitic quasiacotat d'operadors linials e^{Lt} en H.

Nota: L genera un semigrup analític quasiacotat si existeix un $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $L = \gamma I + A$, on A és el generador infinitessimal d'un semigrup analític. Aleshores és clar que $e^{Lt} = e^{\gamma t} e^{At}$

$$|e^{Lt}| < Ce^{\gamma t}$$

Per la definició de semigrup analític, vegi's Friedmann

Si definim a D el següent producte escalar:

$$(u,v)_D = (u,v)_H + (Lu, Lv)_H$$

D és un espai de Hilbert en virtut del següent:

Lemma 1.1 Sigui T un operador linial amb domini D dens a B espai de Banach. Definim a D la norma

$$|u|_G = |u| + |Tu| \quad \text{(norma del graf)}$$

Llavors, D és G-complet si i només si T és tancat.

Demostració

a) Provem que si T és tancat, D és G-complet.

Sigui $\{u_n\} \subset D$ una successió de Cauchy per a la norma $|.|_G$. Aleshores, $\{u_n\}$ i $\{Tu_n\}$ són de Cauchy a B. Per tant, existeixen $u, v \in B$ tals que $\lim u_n = u$, $\lim Tu_n = v$ en B. Com T és tancat (té la gràfica tancada), $u \in D$ i $Tu = v$. Llavors $|u_n - u|_B \to 0$ i $|Tu_n - Tu|_B \to 0$ i, per tant. $\lim u_n = u$ en D; és a dir, D és G-complet.

b) Provem ara que si D és G-complet, T és tancat.

Sigui $\{u_n\} \subset D$ tal que $u_n \to u$ i $Tu_n \to v$ amb la norma de B. Llavors $\{u_n\}$ és una successió de Cauchy amb la norma $|.|_G$. Com D és G-complet, existeix $u' \in D$ tal que $\lim u_n = u'$ en D. En particular, $u_n \to u'$ en B i, per unicitat, $u' = u \in D$.

Llavors:

$$|Tu-v|_B \leq |Tu-Tu_n|_B + |Tu_n-v|_B = |T(u-u_n)|_B +$$

$$+ |Tu_n-v|_B \leq |u-u_n|_G + |Tu_n-v|_B \to 0$$

Per tant $Tu = v$ i T és tancat.

Suposem, a més, que D està contínuament encabit en K i que tenim la següent acotació:

$$(5) \quad |e^{Lt}|_{L(K,D)} < \frac{C}{\sqrt{t}} \qquad t \in (o,T]$$

(Observi's que $e^{Lt} \in L(K,D)$ perque K esta inclòs continuament en H).

És té el següent lemma:

Lemma I.2 Una condició equivalent a (5) és que existeixin $M > 0$ i $\delta > 0$ tals que

$$|(I-\varepsilon L)^{-1}|_{L(K,D)} \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}\ ,\quad \varepsilon \in (0,\delta]$$

La idea de la demostració, que es pot trobar a (Iooss, VII, 17), és la següent:

De l'analiticitat de e^{Lt} i de la norma de D es segueix que $|e^{Lt}u_o|_D \leq C(|v|_D + \frac{1}{t}|u_o - v|_H)$, per $t \in (0,T]$

Si es compleix la desigualtat del lemma, tenim, per a $u_o \in K$ i $v = (I-tL)^{-1}u_o$, $t > 0$, que

$$|v|_D \leq \frac{M}{\sqrt{t}}\, |u_o|_K$$

A més, com que $|v-u_o|_K \leq M\sqrt{t}\,|u_o|_K$ s'obté (5) aplicant la desigualtat trobada per a $|e^{Lt}u_o|_D$.

De (5) s'obté la desigualtat del lemma tenint en compte que

$$(I-\varepsilon L)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-t/\varepsilon}e^{Lt}dt.$$

Nosaltres volem resoldre l'equació d'evolució següent:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Lu + M(u) \quad ,\qquad u \in C([o,t],D) \cap C^1([o,t],H) \\ &u(0) = u_o \in D \end{aligned}$$

on $M \in C^1(D,K)$; M i DM transporten acotats en acotats i $DM(0) = 0$.

Recordem que $C^r([0,T],B)$ és l'espai de Banach de les funcions de classe C^r de $[0,T]$ en l'espai de Banach B amb la norma:

$$|u|_{r,T,B} = \sum_{k=0}^{r} \sup_{t \in [0,T]} |u^{(k)}(t)|_B$$

Equació linial no homogenea

Tractarem primerament el problema d'evolució

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu + f(t) & u \in C^0([0,T],D) \cap C^1([0,T],H) \\ u(0) = u_0 \in D \end{cases}$$

on L és el mateix operador d'abans i f és una aplicació de $[0,T]$ en K de classe C^0.

Els següents dos lemmes són una versió adaptada al nostre cas de [Iooss, pags. VII.3, 4]:

Lemma 1.3 Si el semigrup e^{Lt} és tal que $|e^{Lt}|_{L(K,D)} < \frac{C}{t^{1/2}}$ per a $t \in (o,T]$

Llavors:

$$|e^{Lt}-e^{Ls}|_{L(K,D)} \leq C_1(\ln s - \ln t + |t-s|^{1/2}),\ t,s, \in (0,T].$$

Demostració

La desigualtat $|e^{Lt}|_{L(K,D)} < \frac{C}{t^{1/2}}$ implica $|Le^{Lt}|_{L(K,H)} < \frac{C}{t^{1/2}}$

Aleshores, tenint en compte $e^{Lt}u \in \text{Domini}(L^n)$ $\forall n \in N$ si $u \in H$ i que $Le^{Lt}u = e^{Lt}u = e^{Lt}Lu$ si $u \in D$.

$$|L^2e^{Lt}|_{L(K,H)} = |L^2e^{Lt/2}e^{Lt/2}|_{L(K,H)} = |Le^{Lt/2}Le^{Lt/2}|_{L(K,H)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{C}{(t/2)^{1/2}}\right)^2 < \frac{2C^2}{t} \quad \text{si } t \in (0,T]$$

D'altra banda:

$$|e^{Lt}-e^{Ls}|_{L(K,H)} = \left|\int_s^t \frac{de^{Lt\tau}}{d\tau}d\tau\right|_{L(K,H)} = \left|\int_s^t Le^{L\tau}d\tau\right|_{L(K,H)} \leq$$

$$\leq \int_s^t \frac{C}{\tau^{1/2}}\, d\tau = C|t^{1/2}-s^{1/2}| \leq C|t-s|^{1/2}$$

$$|Le^{Lt}-Le^{Ls}|_{L(K,H)} = |L\int_s^t \frac{de^{L\tau}}{d\tau}\, d\tau| = |\int_s^t L^2 e^{L\tau} d\tau| \leq |\int_s^t \frac{2C^2}{\tau}\, d\tau| =$$

$$= 2C^2|\ln t - \ln s| \qquad \text{per } s,t \in (0,T]$$

Per tant

$$|e^{Lt}-e^{Ls}|_{L(K,D)} = |e^{Lt}-e^{Ls}|_{L(K,H)} + |Le^{Lt}-Le^{Ls}|_{L(K,H)} \leq$$

$$\leq C_1(|\ln t - \ln s| + |t-s|^{1/2})$$

Lema 1.4 L'aplicació $t \to v(t) = \int_0^t e^{L(t-\tau)} f(\tau) d\tau$ és de classe C^0 de $[0,T]$ en D.

Demostració Sigui $h > 0$

$$v(t + h)- v(t) = \int_0^t (e^{L(t+h-\tau)} - e^{L(t-\tau)}) f(\tau) d\tau + \int_t^{t+h} e^{L(t+h-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Direm $|f|_{T,K} = \sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|_K$

Llavors, denotant per $|f|$ a $|f|_{T,K}$:

$$(8) \quad |\int_t^{t+h} e^{L(t+h-\tau)} f(\tau) d\tau|_D \leq \int_t^{t+h} \frac{C}{(t+h-\tau)^{1/2}}\, |f| d\tau = 2Ch^{1/2}|f|_K$$

$$(9) \quad |\int_0^t (e^{L(t+h-\tau)} - e^{L(t-\tau)}) f(\tau) d\tau|_D \leq C|f| \int_0^t (\ln(t+h-\tau) - \ln(t-\tau) + h^{1/2}) d\tau =$$

$$= C|f|\left[h\left[\ln \frac{h}{t-\tau} - \frac{\ln(1+h/t-\tau)}{h/t-\tau} - \ln(1 + \frac{h}{t-\tau})\right]_0^t + th^{1/2}\right] =$$

$$= C|f|\left[-h \ln \frac{h}{t} + t \ln(1 + \frac{h}{t}) + h \ln(1 + \frac{h}{t}) + t h^{1/2}\right] =$$

$$= O(h^{1/2}) \quad \text{quan } h \to 0$$

(8) i (9) impliquen que v és continua.

És evident que L és acotat com a operador de D en H. Per tant $Lv \in C([0,T],H)$.

El seguent lemma, que no hem trobat demostrat enlloc, ens és necessari:

Lemma 1.5 Una aplicació f de $[0,T]$ en un espai de Banach B contínua i amb derivada per la dreta f'_+ continua, és derivable amb continuïtat.

Demostració L'enunciat és cert si $B = \mathbb{R}$. Això es demostra fent veure que el teorema del valor mitjà és valid per a funcions contínues amb derivada per la dreta contínua (via teorema de Rolle), i després veient que existeix

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ i és igual a $f'_+(x)$.

Ara definim $g(t) = \int_0^t f'_+(\tau)d\tau + f(0)$

Pel teorema fonamental del càlcul, g és derivable i $g'(t) = f'_+(t)$.

Sigui $\sigma \in B'$ (dual topològic de B).σf és una aplicació de $[0,T]$ a $\mathbb{R}$ contínua i amb derivada per la dreta, $\sigma f'_+$, contínua. Pel fet anterior, σf és derivable i $(\sigma f)' = \sigma f'_+$.

Però $\sigma g(t) = \int_0^t \sigma f'_+(\tau)d\tau + \sigma f(0)$ és derivable: $(\sigma g(t))' = \sigma f'_+(t)$.

Per tant, la funció $\sigma g(t) - \sigma f(t)$ és constant. Però, de $\sigma g(0) = \sigma f(0)$, tindrem que $\sigma(g(t)-f(t) = 0$.

Aplicant el teorema de Hahn-Banach, deduïm que $f(t) \equiv g(t)$ i, per tant, f és derivable amb continuïtat.

Amb aquest preliminars, podem demostrar:

Teorema 1.1 Fórmula de variació de paràmetres:

El problema d'evolució (7) té una única solució

$$u(t) = e^{Lt}u_o + \int_0^t e^{L(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

Demostració

a) Unicitat- Siguin u_1 i u_2 dues solucions de (7). Llavors $w = u_1 - u_2$ compleix:

$$\frac{dw}{dt} = Lw \qquad w \in C([0,T],D) \cap C^1([0,T],H)$$

$$w(0) = 0$$

Llavors, si $t < T$, $\frac{d}{dt}\, e^{L(T-t)}w(t) = -e^{L(T-t)}Lw(t) + e^{L(T-t)}w'(t) = 0$

Integrant els dos membres de la igualtat:

$$0 = \int_0^T (\frac{d}{dt}\, e^{L(T-t)}w(t)\; dt = e^{L(T-t)}w(t)\Big|_0^T = w(T)$$

b) Existència- Hem de provar que

$$u(t) = e^{Lt}u_o + \int_0^t e^{L(t-\tau)}f(\tau)d\tau \quad \text{és solució de (7).}$$

L'aplicació $\mathcal{H}: t \to e^{Lt}u_o$ pertany a l'espai $C([0,T],D) \cap C^1([0,T],H)$.

En efecte:

Del lemma 1.3 és clar que $\mathcal{H} \in C((0,T],D)$.

Per la definició de semigrup fortament continu tindrem que $\mathcal{H} \in C([0,T],H)$, i, per la definició de semigrup analític, $\mathcal{H} \in C^1((0,T],H)$.

Com $u_o \in D$, si $t > 0$: $\mathcal{H}'(t) = \frac{d(e^{Lt}}{dt} u_o) = Le^{Lt}u_o = e^{Lt}Lu_o$.

Per la definició de generador d'un semigrup,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{Lt}u_o - u_o}{t} = Lu_o$$

És a dir, $\mathcal{H}$ es derivable com a aplicació de $[0,T]$ en H i la seva derivada $\mathcal{H}'$, és $e^{Lt}\, Lu_o$ si $t > 0$ i Lu_o si $t = 0$. Però com que e^{Lt} és fortament continu deduim que $\mathcal{H}'$ és continua en H i que $\mathcal{H} \in C^1([0,T],H)$.

Només ens falta veure que $\mathcal{H}$ és contínua en el 0 com a aplicació de $[0,T]$ en D.

Pero tenim:

$$|e^{Lt}u_o - u_o|_D = |e^{Lt}u_o - u_o|_H + |Le^{Lt}u_o - Lu_o|_H$$

$$|e^{Lt}u_o - u_o|_H \to 0 \qquad \text{quan} \quad t \to 0$$

$$|Le^{Lt}u_0 - Lu_0|_H = |e^{Lt}Lu_0 - Lu_0|_H \to 0 \qquad \text{quan} \quad t \to 0$$

O sigui, $\mathcal{H} \in C([0,T], D) \cap C^1([0,T],H)$.

Pel lemma 1.4, l'aplicació $t \to \int_0^t e^{L(t-\tau)} f(\tau)d\tau = v(t)$ pertany a $C([0,T], D)$. Anem a veure que també pertany a $C^1([0,T], H)$.

Prenem $h > 0$:

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \frac{1}{h}(e^{Lh}-I) \int_0^t e^{L(t-\tau)} f(\tau)d\tau + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{L(t+h-\tau)} f(\tau)d\tau$$

D'on

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = Lv(t) + f(t) \qquad \text{dins } H.$$

Com $v(t)$ és contínua en H, té derivada per la dreta $Lv(t) + f(t)$ i, aquesta és contínua, concluem que $t \to v(t)$ pertany a $C^1([0,T],H)$.

Per tant $t \to u(t)$ pertany a $C([0,T],D) \cap C^1([0,T],H)$.

Com que $u(0)=u_0$ i $u(t)$ compleix l'equació (7), hem demostrat el teorema.

EQUACIO NO LINIAL

Anem a abordar el problema d'evolució (6).

Demostrarem existència i unicitat de solucions per a aquella equació. El següent teorema és una adaptació d'un teorema de Iooss per al cas analític (Iooss, pag. VII 5 i regtr.)

Teorema 1.2 El problema (6) té solució per a qualsevol condició inicial $u_0 \in D$, per a $0 < t < T^*(u_0)$. Si $T^*(u_0) < \infty$, llavors $\lim_{T \to T^*} |u|_{T,D} = \infty$

$|\cdot|_{T,D}$ vol dir la norma de l'espai de Banach $C([0,T],D)$.

Demostració

És inmediat de comprovar que (6) és equivalent a resoldre l'equació integral:

(10) $\quad u(t) = e^{Lt}u_0 + \int_0^t e^{L(t-\tau)}M(u(\tau))d\tau, \ u \in C([0,T],D).$

Per a demostrar l'existència de solució a aquesta equació, utilitzarem el mètode de l'aplicació contractiva.

Utilitzant la condició (5) i les propietats d'acotació dels semigrups analítics quasiacotats, és clar que $\exists\, C > 0, \ \gamma \in \mathbb{R}$ tals que:

(11) $$|e^{Lt}|_{L(K,D)} \leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{\gamma t} \qquad \text{per a } t > 0.$$

Per simplificar, denotarem $|u|_T = \sup_{t\in[0,T]} |u(t)|_D$

Per a cada T definirem una aplicació

$$\Gamma_T : C([0,T],D) \longrightarrow C([0,T],D)$$
$$u \longrightarrow e^{Lt}u_0 + \int_0^t e^{L(t-\tau)}M(u(\tau))d\tau$$

Anem a provar el següent lemma:

Lemma 1.6 Existeix $T_0 > 0$ tal que Γ_{T_0} és una contracció de la bola tancada de centre 0 i radi $2|u_0|_D$.

Demostració:

Denotem: $\quad R_0 = 2|u_0|_D$

$$B(R_0) = \{u \in D \mid |u|_D < R_0\}$$
$$B_T(0,R_0) = \{u \in C([0,T],D) \mid |u|_T < R_0\}$$

Per la hipòtesi sobre M i DM, existeix $K_{R_0} > 0$ tal que

$$|M(u)|_K < K_{R_0} \qquad \forall u \in B(R_0)$$

$$|DM(u)|_{L(D,K)} < K_{R_0} \quad \forall u \in B(R_0)$$

Com a conseqüència del teorema del valor mitjà com $B(R_0)$ és convex:

$|M(u(\tau)) - M(v(\tau))|_K < K_{R_0}|u(\tau) - v(\tau)|_D$ si $u(\tau), v(\tau) \in B(R_0)$

Llavors: si $u \in B_T(0,R_o)$, $v \in B_T(0,R_o)$ tindrem:

$$|\Gamma_T(u) - \Gamma_T(v)|_T = |\int_0^t e^{L(t-\tau)}(M(u(\tau)) - M(v(\tau)))d\tau|_T \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [0,T]} \int_0^t Ce^{\gamma\tau}(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}})|\, M(u(\tau)) - M(v(\tau))|_K d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{t \in [0,T]} \int_0^t Ce^{\gamma\tau}(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}})K_{R_o} \; |u(\tau) - v(\tau)|_D d\tau \leq$$

$$\leq K_{R_o} |u-v|_T \int_0^T Ce^{\gamma\tau}(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}})d\tau.$$

D'altra banda, si $u \in B_T(R_o)$

$$|\Gamma_T(u)|_T \leq \sup_{t \in \; 0,T} |e^{Lt}u_o|_D + |\int_0^T e^{L(t-\tau)}M(u(\tau))d\tau|_D \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \; 0,T} |e^{Lt}u_o|_D + \int_0^T Ce^{\gamma\tau}(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}})K_{R_o} d\tau.$$

Fixada $k < 1$ (per exemple $k = 1/2$).

Triem T_o, el màxim T tal que

$$\int_0^T Ce^{\gamma\tau}(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}})K_{R_o} d\tau \leq k < 1$$

$$\sup_{t \in [0,T]} |e^{Lt}u_o|_D + C \int_0^T e^{\gamma\tau}(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}})K_{R_o} \leq R_o$$

Aquest T_o compleix la tesi del lemma 1.6.

Aplicant el teorema de l'aplicació contractiva deduïm que existeix dins $C([0,T_o], B(R_o))$ un punt fix de Γ_{T_o}. És a dir, obtenim una solució de (6) per $t \in [0,T_o]$ i sabem que $\sup_{t \in [0,T]} |u(t)|_D \leq 2|u_o| = R_o$.

Observem que $C([0,T], B(R_o)) = B_{T_o}(0,R_o)$.

Repetint el procés prenent com a condició inicial $u_1 = u(T_o)$ obtenim una solució a $C([0,T_1], B_{R_1})$.

Així successivament obtindrem una successió de temps T_0, T_1, T_2,... i de condicions inicials $u(T_0)$, $u(T_1)$,... de manera que la solució existirà per a tota $t < \sum_{i=1}^{\infty} T_i = T^*$.

Si la successió $\{T_i\}$ està acotada inferiorment, la solució existirà per a tota $t > 0$. Si T_i no està acotada inferiorment, això voldrà dir que la successió de les K_{R_i} no està acotada superiorment (recordi's com s'ha escollit T_i). Això últim implica, donades les hipòtesis sobre M i DM, que $\overline{\lim}_{T_i \to T_m} |u(T_i)|_D = \infty$.

En definitiva $\lim_{T \to T_m^*} |u|_T = \infty$

Aprofitarem ara la unicitat del punt fix d'una contracció per a demostrar el següent teorema, per un mètode diferent del utilitzat per [Iooss , pag. VII, 8.]

Teorema 1.3 La solució del problema (6) és única sobre tot interval d'existència $[0,T)$.

Demostració Demostrem primer que si u i v són solucions de (6) en un interval $[0,T)$ i $u(t_0) = v(t_0)$ per a algún $t_0 \in [0,T)$ llavors u i v coincideixen en un interval $[t_0, t_1]$.

En efecte:

$u(t)$ i $v(t)$ són solucions de l'equació integral

$$w(t) = e^{Lt}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)}M(w(\tau))d\tau,$$

Per continuïtat, existeix t_0' tal que:

$$\sup_{t \in [t_0, t_0']} |u(t)|_D < 2|u(t_0)|_D, \quad \sup_{t \in [t_0, t_0']} |v(t)|_D < 2|v(t_0)|_D$$

Aleshores, definim

$$\begin{aligned} \Gamma_T : C([t_0,T],D) &\longrightarrow C([t_0,T],D) \\ w(t) &\longrightarrow e^{Lt}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)}M(w(\tau))d\tau \end{aligned}$$

És evident (recordant la demostració anterior), que existeix $t_1 \in (t_0,t_0']$ tal que Γ_{t_1} és una contracció dins del tancat

$$B_{t_1}(0,\ 2|u(t_0)|) \subset C([t_0,t_1],D).$$

Com que u i v pertanyen a $B_{t_1}(0,\ 2|u(t_0)|)$ i són punts fixes de Γ_{t_1} deduïm que $u(t) = v(t) \quad \forall t \in [t_0,t_1]$.

Demostrem ara que u i v coincideixen a tot $[0,T]$.

Sigui $A = \{t \in (0,T) \mid u(s) = v(s) \quad \forall s \in [0,t)\}$

A no és buit perquè $u(o) = v(o)$ i per tant existeix $\delta > 0$ tal que $(0,\delta) \subset A$.

Demostrarem que $\sup A = T$. Suposem $\sup A = T^* < T$.

Llavors $u - v \in C([0,t^*],D)$ i $u - v \equiv 0$ a $[0,t^*)$.

Per continuitat $u(t^*) = v(t^*)$.

Aplicant el que hem vist abans, existeix un interval $[t^*,t^{**}]$ en el que coincideixen u i v. Però això es contradictori.

Fins aquí hem demostrat existència i unicitat de solucions de les equacions d'evolució del tipus (6). Provarem ara la continuitat i diferenciabilitat de les solucions respecte a les condicions inicials. L'arma que utilitzarem serà el teorema de funció implícita per a aplicacions entre espais de Banach (veure Dieudonné, Schwartz).

Per a cada $t \leq T < T^*$ definim una aplicació

$$F_t : D \longrightarrow D$$

tal que $F_t(u)$ sigui la solució al temps t de (6) amb condició inicial $u \in D$.

<u>Teorema 1.4</u> L'aplicació F_t és diferenciable amb continuïtat, és a dir, pertany a $C^1(D)$.

<u>Demostració</u>:

Definim la següent aplicació:

$$\mathcal{F} : D \times C([0,T],D) \longrightarrow C([0,T],D)$$
$$\mathcal{F}(u, v(t)) = v(t) - e^{Lt}u - \int_0^t e^{L(t-\tau)}M(v(\tau))d\tau$$

És clar que $\mathcal{F}$ és contínua perquè, d'una banda, les aplicacions

$u \in D \longrightarrow e^{Lt}u \in C([0,T],D)$

$v \in K \longrightarrow e^{Lt}v \in C([0,T],D)$

són linials acotades, d'altra banda, $v(t) \in C([0,T],D) \longrightarrow M(v(t)) \in C([0,T],K)$ és contínua, degut al fet que M és contínua i, per últim,

$t \longrightarrow \int_0^t e^{L(t-\tau)}M(v(\tau))d\tau$ és contínua segons el lemma 1.4.

A més existeixen les derivades parcials de $\mathcal{F}$:

$$D_1\mathcal{F}(u,v(t)) : D \longrightarrow C([0,T],D)$$
$$\bar{u} \longrightarrow e^{Lt}\bar{u}$$

$$D_2\mathcal{F}(u,v(t)) : C([0,T],D) \longrightarrow C([0,T],D)$$
$$\bar{v}(t) \longrightarrow \bar{v}(t) - \int_0^t e^{L(t-\tau)}DM(v(\tau))\bar{v}(\tau)d\tau$$

que són linials acotades.

Veiem ara que $D_1\mathcal{F} : D \times C([0,T],D) \longrightarrow L(D, C([0,T],D))$

$$D_2\mathcal{F} : D \times C([0,T],D) \longrightarrow L(C([0,T],D))$$

són contínues i per tant $\mathcal{F}$ de classe C^1.

$D_1\mathcal{F}$ és contínua perque és constant i $D_2\mathcal{F}$ és contínua perquè no depèn de $u \in D$ i DM és contínua com a aplicació de D en L(D,K) i per tant

$$v(t) \in C([0,t],D) \longrightarrow DM(v(t)) \in L(C([0,T],D), C([0,T],K))$$

és també contínua.

<u>Observació</u>: Si $f: X \to Y$ és contínua i X i Y són espais de Banach, $F: C([0,T],X) \to C([0,T],Y)$ definida per $F(u(t)) = f(u(t))$ és també contínua.

Fixem ara $(u_o, v_o(t)) \in D \times C^o([0,T],D)$ tals que $v_o(t)$ és la solució de (6) amb condició inicial u_0. Llavors

$$\mathcal{F}(u_0,\ v_0(t)) = 0$$

Com DM és contínua respecte a $v \in D$ i $t \to v_0(t)$ és contínua en el compacte $[0,T]$ tindrem que

$$|DM(v_0(t))| < C_1 \qquad \forall t \in [0,T]$$

Aleshores existeix un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\int_0^t e^{L(t-\tau)} DM(v_0(\tau)).\ \right|_{L(C([0,\delta],D))} < \left|\int_0^t C\, C_1 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right) e^{\gamma\tau} d\tau\ \right| < 1.$$

Per tant $\mathcal{F} : D \times C([0,\delta],D) \to C([0,\delta],D)$ será de classe C^2 i tal que $(u_0,\ v_0(t)) = 0$ i la derivada parcial

$D_2\mathcal{F}(u_0,\ v_0(t)) = I - \int_0^t e^{L(t-\tau)} DM(v(\tau)).\ d\tau$ és invertible i d'inversa acotada.

El teorema de funció implícita ens assegura que existeix una aplicació

$$F_1 : U_1 \to V_1$$

U_1 i V_1 entorns de u_0 a D i de v_0 a $C([0,\delta_0],D)$ respectivament, tals que

$$F_1 \text{ és de classe } C^1$$
$$F_1(u_0) = v_0(t)$$
$$\mathcal{F}(u_1, F_1(u)) = 0 \quad \forall u \in U_1$$

És a dir, $F_1(u)$ és la solució de (6) amb condició inicial u i és de classe C^1 en u.

Reemplaçant u per $v(\delta_0)$ obtenim v(t) de classe C^2 respecte $v(\delta_0)$ dins $[\delta_0,\ 2\delta_0]$. És a dir obtenim

$$F_2 : U_2 \longrightarrow V_2$$

U_2 entorn de $v(\delta_0)$ i V_2 entorn de v(t) a $C([\delta_0,\ 2\delta_0],D)$, F_2 de classe

C^1 tal que $F_2(u) = v(t)$

$$\mathcal{F}(u,\ F_2(u)) = 0 \quad \forall u \in U_2$$

Reiterem el procés canviant $v(\delta_o)$ per $v(2\delta_o)$... fins a recobrir $[0,T]$ (amb un nombre finit de δ's).

Diem E_s: $u \in C([0,T],D) \to u(s) \in D$. Aquesta aplicació (anul.lació en el punt s) és lineal contínua per a tota $s \in [0,T]$.

Existeix un entorn U de $u_o \in D$ tal que $U \subset U_1$, $E_{\delta_o} \circ F_1(U) \subset U_2$, $E_{\delta_o} \circ F_2 \circ E_{\delta_o} \circ F_1(U) \subset U_3$ i així fins a completar els δ's.

Sigui $t \in [(m-1)\delta_o,\ m\delta_o]$ fixat, $m < n$. Definim

$$F_t : U \longrightarrow D$$

$$F_t = E_t \circ F_{m-1} \circ E_{(m-1)\delta_o} \circ \ldots \circ E_{\delta_o} \circ F_1$$

Aplicant la regla de la cadena, F_t és de classe C^1. Observem per acabar que $F_t(u)$ és la solució de (6) amb condició inicial u.

<u>Corol.lari 11</u> Si $M(o) = 0$, $DF_t(0) = e^{Lt}$ per $t \in [0,T]$.

És a dir, L (la part linial de l'equació) és el generador infinitessimal del semigrup analític $DF_t(0)$ (la part linial del sistema dinàmic definit per l'equació).

<u>Demostració</u> Tenim que

$$\mathcal{F}(0,0) = 0$$

$$D_1\mathcal{F}(0,0) = -e^{Lt}$$

$$D_2\mathcal{F}(0,0) = I$$

Llavors aplicant el teorema de funció implícita existeix una única F definida en un entorn U de $0 \in D$:

$$F : U \longrightarrow C([0,T],D)$$

tal que $F(o) = 0$; $\mathcal{F}(u,F(u)) = 0 \ \forall u \in U$. A més

$$DF(u) = -(D_2F(u,F(u)))^{-1} D_1F(u,F(u)) \text{ i per tant}$$

$$DF(o) = -Ie^{Lt} = e^{Lt} \in L(D, C([0,T],D))$$

Com $F_t(u)$ és la composició de F amb l'avaluació a t, que és linial acotada, tindrem

$$DF_t(o) = E_t DF(o) = e^{Lt} \in L(D)$$

Teorema 1.5 Les solucions de l'equació d'evolució (6) defineixen un semi-sistema dinàmic local diferenciable a D.

Més precisament, l'aplicació:

$F_t : [0,T] \times D \to D$ tal que fixat $u_o \in D$, $F_t(u_o)$ és la solució de (6) compleix les següents propietats:

a) Fixat $u_o \in D$, $t \to F_t(u_o) \in C([0,T],D) \cap C^1([0,T],H)$

b) Fixat $t \in [0,T]$, $u \to F_t(u) \in C^1(D,D)$

c) $F_{t+s}(u) = F_t(F_s(u)) \qquad t,s \in [0,T]$

d) $F_o(u) = u$

La demostració és l'aplicació inmediata dels teoremes 1.3 i 1.4.

2. EXISTÈNCIA, UNICITAT I DEPENDÈNCIA RESPECTE A LES CONDICIONS INICIALS DE LES SOLUCIONS DEL SISTEMES DE REACCIÓ DIFUSIÓ.

En aquesta secció demostrarem que el sistema de reacció-difusió:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(u) \ , \quad f \text{ de classe } C^2 \text{ de } \mathbb{R}^m \text{ en } \mathbb{R}^m$$

$$u(x,0) = u_o \ , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0 \ , \quad x \in \partial\Omega \quad \text{de classe } C^2.$$

es troba sota les hipòtesis que permeten obtenir els teoremes de la secció 1.

El primer que hem de fer, doncs, és demostrar que l'operador $d\Delta$ és tancat, densament definit i genera un semigrup analític que compleix la propietat (5).

Lemma 2.1 Sigui A un operador fortament el.líptic amb coeficients reals continus i amb domini $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ dens a $L^2(\Omega)$. Suposem $\partial\Omega$ de classe C^2 i Ω acotat. Llavors A és tancat a $L^2(\Omega)$.

La demostració d'aquest fet i de resultats més generals es pot trobar a FRIEDMAN, cap 18 i 19.

Al final d'aquest capítol es provaran certes propietats de la funció F definida a $D = (H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}))^m$, amb valors a $K = (H^1(\Omega))^m$. Recordem $F(u)(x) = f(u(x))$. En particular es demostrarà que si $u_0 \in D$. l'aplicació

$$\begin{aligned} DF(u_0):\ & D \to K \\ & u \to f'(u_0(x)).u(x) \end{aligned}$$

és lineal acotada. De la seva definició, és evident que podem estendre $DF(u_0)$ a tot $H = (L^2(\Omega))^m$ i continua essent acotat (com a operador a H).

Podem ara anunciar el seguent:

Teorema 2.1 Sigui $L = DF(u_0) + d\Delta$ operador definit a H amb domini D; L és tancat a H.

Demostració: Pel lemma anterior, és evident que $d\Delta$ és tancat. Com que $DF(u_0)$ és acotat (a H), L és tancat.

Definim ara a D una topologia d'espai amb producte escalar:

$$(u,v)D = (u,v)_H + (Lu, Lv)_H,\ u,v \in D.$$

Lemma 2.2 El producte escalar anterior confereix a D una estructura d'espai de Hilbert. És a dir, D és complet amb la norma del graf.

Això es dedueix inmediatament del lemma 1.1 i el teorema 2.1.

Teorema 2.2 La norma del graf $|.|_G$ i la norma habitual dels espais de Sobolev $|.|_D$ són equivalents.

Demostració

Recordem $|u|_D = \sum_{i=1}^{m} |u_i|_{H^2(\Omega)}$

Denotem $D = |DF(u_0)|_{L(H)}$. Llavors

$$|u|_G = |u|_H + |Lu|_H = |u|_H + |DF(u_0)u + d\Delta u|_H \leq (1 + D)\ |u|_H + |d\Delta u|_H =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (1 + D)\ |u^i|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} d_i |\Delta u^i|_{L^2(\Omega)} \leq C|u|_D.$$

Per tant, la inclusió canònica $D_D \subset D_G$ és contínua i linial. El teorema de l'aplicació oberta assegura que és un homeomorfisme. Per tant, les dues normes són equivalents.

Propietats de l'opearador Δ

Estudiarem ara les propietats de l'operador Δ amb domini l'espai de Sobolev $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ sobre $\mathbb{C}$ dens a $L^2(\Omega)$. Ja sabem que Δ és tancat. Anem ara a demostrar que és autoadjunt no positiu i genera un semigrup analític a $L^2(\Omega)$. La demostració és suggerida a les notes de Iooss.

Lemma 2.3 Δ és simetric no positiu.

Demostració

a) Hem de demostrar que, donades u i v a $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$

$$(u, \Delta v) = (\Delta u, v).$$

Abans de seguir advertim que $(.,.)$ representa el producte escalar en l'espai de Hilbert $L^2(\Omega)$ i $<.,.>$ el producte escalar a $\mathbf{R}^n$.

Comencem provant-ho per a funcions u i v de

$$C^2_\nu(\Omega) = \{u \in C^2(\bar{\Omega})|\ <\text{grad } n, \vec{n}> = 0 \text{ a } \partial\Omega\}$$

on $\vec{n}$ representa el vector normal a $\partial\Omega$. Recordem que $C^2_\nu(\Omega)$ és dens a $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$.

El teorema de la divergència (concretament la identitat de Green) ens assegura:

$$\int_\Omega (u\Delta\bar{v} - v\Delta\bar{u}) = \int_{\partial\Omega} < u \text{ grad } \bar{v} - v \text{ grad } \bar{u}, \vec{n} > = 0$$

$$\forall u, v \in C^2_\nu (\Omega)$$

Per tant, $(u,\Delta v)-(v, \Delta u) = 0 \qquad \forall u, v \in C^2_\nu (\Omega)$

Ara bé, si definim

$$(u,v) \in (H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu}))^2 \to (u,\Delta v)-(v,\Delta u) \in \mathbb{C}$$

és clar que aquesta aplicació és una forma bilinial contínua:

$$|(u, v)| = |\int_\Omega u\Delta\bar{v}| \leq (\int_\Omega |u|^2)^{1/2} (\int_\Omega |\Delta\bar{v}|^2)^{1/2} \leq |u|_{H^2(\Omega)} |v|_{H^2(\Omega)}$$

i igualment per $(v,\Delta u)$.

Com que s'anul.len a $(C^2(\Omega))^2$ que és un subespai dens de $(H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}))$, tindrem, en definitiva

$$(u,\Delta v) - (v,\Delta u) = 0 \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu})$$

És a dir, Δ és simètric.

b) Provem ara que Δ és no positiu.

Sigui $u \in C^2_\nu(\Omega)$. Pel teorema de la divergència

$$0 = \int_\Omega < \bar{u} \text{ grad } u, \vec{n} > = \int_\Omega |\text{grad } u|^2 + \int_\Omega \bar{u}\Delta u$$

la qual cosa implica $(\Delta u,u) \leq 0 \quad \forall u \in C^2_\nu(\Omega)$

Com les aplicacions $u \longrightarrow \int \bar{u}\Delta u$

$u \longrightarrow \int |\text{grad } u|^2$

són contínues, i $C^2_\nu(\Omega)$ és dens a $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$, deduïm que

$$(\Delta u,u) = - \int |\text{grad } u|^2 \leq 0 \quad \forall u \in H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu})$$

Recordem que un operador autoadjunt és un operador T simètric en el qual els dominis de T i T* coincideixen.

Lemma 2.4 Existeix un nombre real positiu k tal que $T = \Delta + kI$ és autoadjunt. Per tant Δ és també autoadjunt.

Demostració

T és simètric per a qualsevol k real:

$$(Tu,v) = ((\Delta + kI)u, v) = (\Delta u + ku, v) =$$

$$= (u,\Delta v) + (u, \bar{k}v) = (u,(\Delta + kI)v) = (u, Tv)$$

El domini de T és $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ dens a $L^2(\Omega)$

Fàcilment es comprova que estem en les hipotesis del teorema IIq.3 de Friedmam. Per tant existeix una $k > 0$ tal que el rang de $\Delta + kI$ és tot $L^2(\Omega)$.

Llavors el teorema 13.11 de Rudin (Anàlisi Funcional) ens assegura que T és autoadjunt (un operador simètric, densament definit i exhaustiu és autoadjunt).

Es defineix λ valor propi aproximat de T si existeixen vectors unitaris u_0 tals que $|(T-\lambda I)u_k| \to 0$.

Corol.lari 2.1 L'espectre de Δ està contingut a $(-\infty, 0]$ i només consta de valors propis i valors propis aproximats.

Aquest corol.lari és conseqüència inmediata del fet que Δ és autoadjunt i no positiu (vegi's cap. 13 de Rudin). En realitat es demostra (vegi's Berezanskii, per a resultats més generals), que $\sigma(\Delta)$ és purament puntual.

Teorema 2.3 L'operador Δ genera un semigrup analític a $L^2(\Omega)$ tal que $|e^{\Delta t}| < C$.

Com que Δ és tancat i densament definit, només hem de demostrar que existeix un nombre $\phi \in (o, \frac{\pi}{2})$ i una constant positiva M tals que

$$\sigma(\Delta) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, \arg\lambda \in (-\frac{\pi}{2} - \phi, \frac{\pi}{2} + \phi)\} = \phi$$

$$\|(\Delta - \lambda I)^{-1}\| < \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{si } \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, \arg\lambda \in (-\frac{\pi}{2} - \phi, \frac{\pi}{2} + \phi)\}$$

En efecte, fixem-nos primer que, del fet que Δ és simetric es segueix $(\Delta u,u) \in \mathbb{R} \quad \forall u \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})$

Sigui $\lambda \neq 0$ tal que $\arg \lambda \in (-\frac{\pi}{2} - \phi, \frac{\pi}{2} + \phi)$

Tindrem el seguit de desigualtats:

$$\forall u \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu}), \ |\lambda| \, \|u\|^2 = |(\lambda u,u)| \leq |(\lambda u,u)| \leq |(\lambda u,u)| - (\Delta u,u) =$$

$$= |(\lambda u,u)| + (-\Delta u,u) \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cos(\frac{\pi}{2} + \phi)}} |(\lambda u,u) + (-\Delta u,u)|$$

Aquesta última desigualtat es dedueix del teorema del cosinus. Suposem implícitament que $-\frac{1}{2} < \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) < 0$.

Dient $\qquad M = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \cos(\frac{\pi}{2} + \phi)}}$

$$|\lambda| \, \|u\|^2 \leq M |((\lambda I - \Delta)u,u)| \leq M \|(\Delta - \lambda I)u\| \, \|u\|$$

$$\|(\Delta - \lambda I)u\| \geq \frac{|\lambda|}{M} \|u\|$$

i per tant $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ $\qquad$ i $\|(\Delta - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$

Espai K

Per a utilitzar els teoremes de la secció 1 hem de definir un espai de Hilbert K intermig entre D i H. Per al nostre problema hem pres

$$K = (H^1(\Omega))^m \quad \text{i} \quad \|u\|_k = \sum_{i=1}^{m} \|u^i\|_{H^1(\Omega)}$$

Lemma 2.5 $D \subset K \subset H$ són espais de Hilbert i les inclusions són contínues.

La demostració és inmediata perquè:

$$\text{Si } u \in D, \quad \|u\|_K \leq \|u\|_D$$

$$\text{Si } u \in K, \quad \|u\|_H \leq \|u\|_K$$

Demostrarem ara que $DF(u_o) + d\Delta$ genera un semigrup analític que satisfà la condició (5), i per a aconseguir-ho seguirem un suggeriment de Iooss pg. VII-18.

Lemma 2.6 Donat $d > 0$. l'operador Δ és tal que existeixen nombres reals positius M_o i δ que compleixen

$$|(I + \varepsilon d\Delta)^{-1}|_{L(H^1(\Omega),H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}))} < M_o\, \varepsilon^{-1/2} \text{ si } \varepsilon \in (0,\delta],$$

Demostració.

Sigui $u \in H'(\Omega)$. Com que Δ és tancat; la norma del graf de $d\Delta$ és equivalent a la norma habitual a $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$.

Aleshores:

$$|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1} u|_{H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})} \leq C(|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1} u|_{L^2} + \varepsilon^{-1}|\varepsilon d\Delta(I+ \varepsilon d\Delta)^{-1}u|_{L^2})$$

Sabem, pel teorema 2.3

$$|(I-\varepsilon d)\Delta)^{-1}u|_{L^2(\Omega)}=|(\varepsilon d)^{-1}((\varepsilon d)^{-1}I-\Delta)^{-1}u|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{(\varepsilon d)^{-1}|u|_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon d^{-1}}=|u|_{L^2(\Omega)}$$

Demostrarem ara

$$|\varepsilon d\Delta(I-\varepsilon d\Delta)^{-1}u|_{L^2} \leq M_1\, \varepsilon^{1/2}\, |u|_{H^1(\Omega)}$$

Pero $\varepsilon d\Delta(I-\varepsilon d\Delta)^{-1} = (I-\varepsilon d\Delta)^{-1}-I$. Per tant ens queda per demostrar

$$|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1}-I|_{L(H^1(\Omega),L^2(\Omega))} < M_1\, \varepsilon^{1/2}$$

Prenem el següent sistema:

$$(12) \quad \begin{aligned} &u_\varepsilon - d\Delta u_\varepsilon = u \in H^2(\Omega) \\ &u_\varepsilon \in H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu}) \end{aligned}$$

Es a dir, u_ε és solució d'aquest sistema si i només si $u_\varepsilon = (I-\varepsilon d\Delta)^{-1}u$.

Efectuem el producte escalar de l'equació (12) per $u_\varepsilon - u$ dins l'espai $L^2(\Omega)$; obtindrem:

$$|u_\varepsilon - u|_{L^2}^2 - \varepsilon d \int \Delta u_\varepsilon (\bar{u}_\varepsilon - \bar{u}) = 0$$

Provarem ara que, per a tots $u \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})$, $v \in H^1(\Omega)$,

$$(13) \qquad \int < \text{grad } v, \text{grad } u > + \int v\Delta u = 0$$

Suposem primer $u \in C^2_\nu(\Omega)$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$. Aleshores, el teorema de la divergència implica:

$$0 = \int_{\partial\Omega} < v \text{ grad } u, \vec{n} > = \int_\Omega < \text{grad } v, \text{grad } u > + \int_\Omega v\Delta u$$

Ara bé, l'aplicació

$(u,v) \in H^2(\Omega) \frac{\partial}{\partial \nu}) \times H^2(\Omega) \to \int < \text{grad } u, \text{grad } v > + \int v\Delta u \in \mathbb{C}$ és una forma bilineal acotada. Com que s'anul.la sobre $C^2_\nu(\Omega) \times C^1(\bar{\Omega})$, dens a $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu}) \times H^1(\Omega)$, deduïm la igualtat (13).

Per tant,

$$|u_\varepsilon - u|^2_{L^2(\Omega)} = \varepsilon d \int_\Omega \Delta u_\varepsilon (\bar{u}_\varepsilon - \bar{u}) = -\varepsilon d \int_\Omega < \text{grad}(\bar{u}_\varepsilon - u), \text{grad } u_\varepsilon > =$$

$$= \varepsilon d \int_\Omega < \text{grad } \bar{u}, \text{grad } u_\varepsilon > - \varepsilon d \int_\Omega |\text{grad } u_\varepsilon|^2 \leq \varepsilon d \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$$

Aplicant la desigualtat de Schwartz:

$$|u_\varepsilon - u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon d \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|_{L_2} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon d}{2} \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\right|^2 \right)$$

O sigui:

$$|u_\varepsilon - u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon d}{2} |u|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1} - I|_{L(H^1(\Omega), L^2(\Omega))} \leq M_1 \varepsilon^{1/2}$$

En definitiva

$$|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1}u|_{H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})} \leq C(|u|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{-1}M_1\varepsilon^{1/2}|u|_{H^1(\Omega)}).$$

Aleshores existeixen $M_0 < 0$, $\delta > 0$ tals que, si $\varepsilon \in (0,\delta]$

$$|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1}u|_{H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})} \leq M_0\varepsilon^{-1/2}|u|_{H^1(\Omega)}$$

Lemma 2.7 Existeixen $M_2 > 0$, $\delta > 0$ tals que

$$|(I-\varepsilon d\Delta)^{-1}|_{L(K,D)} \leq M_2\,\varepsilon^{-1/2} \quad \text{si} \quad \varepsilon \in [0,\delta]$$

La demostració és l'aplicació immediata del lemma 2.6 i del fet que $\varepsilon d\Delta$ és diagonal.

Teorema 2.4 L'operador $L = DF(u_0) + d\Delta$ genera un semigrup analític e^{Lt} a H tal que

$$|e^{Lt}|_{L(K,D)} < \frac{c}{\sqrt{t}} \quad \text{si} \quad t \in [0,T]$$

Demostració

És clar que $|DF(u_0)|_{L(D,K)} < C$ perquè $DF(u_0)$ és acotat, fins i tot com a operador de D en D.

D'altra banda, el teorema 2.3 ens assegura que $d\Delta$ genera un semigrup analític. De Iooss pg. IX-3, tenint en compte el lemma 1.2, es segueix que la condició d'aquest lemma també es compleix per a L, i per tant L genera un semigrup analític que compleix l'acotació que volem demostrar.

Propietats de la funció F

Estudiem ara les propietats de la part de reacció de les nostres equacions. Es tracta d'una funció $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que suposem de classe $C^k(\mathbb{R}^m)$.

La part no linial de la forma abstracta del sistema de reacció difusió és una aplicació F amb domini D i que definim:

$$F(u) = f(u(x))$$

Per a cada u, F(u) sera una funció definida a Ω i valors a $\mathbb{R}$. Suposem, com sempre, Ω acotat i $\partial\Omega$ de classe C^2, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Esmentem ara un lemma sobre els espais de Sobolev que utilitzarem després per a estudiar les propietats de F.

Lemma 2.8 Si $n \leq 3$, $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ està continuament encabit en l'espai vectorial normat $C^1(\bar{\Omega})$ de les funcions contínues a $\bar{\Omega}$ amb la norma del suprem.

L'asserció d'aquest lemma és un cas particular del lemma de Sobolev:

"Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domini acotat que satisfà la condició del con(en particular $\partial\Omega$ de classe C^1), si $j > m + \frac{n}{2}$, llavors $u \to u$ defineix una inclusió contínua de $H^j(\Omega)$ en $C^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \,|\, |D^\alpha u| < \infty, |\alpha| < m\}$

Si $\partial\Omega$ és de classe C^m, $C^m_*(\Omega)$ es pot substituir per $C^m(\bar{\Omega})$ en l'enunciat del lemma (FRIEDMAN, Pag. 30)

Restringim-nos a estudiar sistemes d'una sola equació, és a dir, $m = 1$. En aquesta situació, f és una aplicació de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de classe C^k. Per tant, donada $u \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}) \subset C(\bar{\Omega})$, existeixen les quantitats

$$\sup_{x \in \Omega} |f^j(u(x))| < \infty \qquad \text{si } j \leq k$$

Direm

$$K_{ju} = \sup_{x \in \Omega} |f^j(u(x))|$$

$$K_u = \sup_{x \in \Omega} |f(u(x))|$$

Els següents teoremes, i la conclusió que l'equació de reacció difusió defineix un sistema dinàmic, no els hem trobat provats enlloc.

Teorema 2.5

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, l'aplicació F definida abans $F(u) = f(u(x))$ transporta $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ dins de $H^1(\Omega)$ i F és contínua.

Demostració

Hem de provar, primerament, que si $u \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$, $F(u) \in H^1(\Omega)$.

És a dir, que $f(u(x))$ i les seves derivades primeres són a $L^2(\Omega)$ (recordem que parlem de derivades distribucionals)

Per simplificar, sigui $|.|_0 := |.|_{L^2(\Omega)}$, $|.|_1 := |.|_{H^1(\Omega)}$, $|.|_2 := |.|_{H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})}$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} =: u_j$

$$|F(u)|_0^2 = \int_\Omega |f(u(x))|^2 \leq K_u^2\, \mu(\Omega) < \infty$$

$$|F_j(u)|_0^2 = \int_\Omega |f'(u)u_j|^2 \leq K_{1u}^2 \int_\Omega |u_j|^2 \leq K_{1u}^2 |u|_2^2 < \infty$$

Demostrem ara la continuïtat de F.

Notem que, com a conseqüència del lemma 2.8, la convergència en $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ implica la convergència uniforme.

Notem també que, si una successió $\{u_n\} \subset C(\bar\Omega)$ convergeix uniformement a $u \in C(\bar\Omega)$, existeix un compacte K inclòs a $\mathbb{R}$ tal que $u_n(\Omega) \subset K$, $u(\Omega) \subset K$ $\forall n$.

D'això últim es dedueix que, si $u_n \rightrightarrows u$, les successions $\{f(u_n)\}$ i $\{f'(u_n)\}$ convergiran uniformement a $f(u)$ i $f'(u)$ (degut a la continuïtat uniforme de f i de la seva derivada dins K). Sigui $M = \sup_{x \in K} |f'(x)| < \infty$

Aleshores:

$|F(u_n) - F(u)|_0^2 = \int_\Omega |f(u_n(x)) - f(u(x))|^2 \to 0$ per la convergència uniforme de $f(u_n)$ cap a $f(u)$.

$$|F_j(u_n) - F_j(u)|_0 = |f'(u_n(x))u_{n,j}(x) - f'(u)(x)u_j(x)|_0$$

$$\leq |f'(u_n)u_{n,j} - f'(u_n)u_j|_0 + |f'(u_n)u_j - f'(u)u_j|_0 \leq$$

$$\leq M|u_{n,j} - u_j|_0 + \left(\int |f'(u_n) - f'(u)|^2 (u_j)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq M|u_n - u|_2 + |u|_2 \sup_{x \in \Omega} |f'(u_n(x)) - f'(u(x))|$$

El primer sumand tendeix a 0 per hipòtesi i el segon també perquè $f'(u_n(x))$ convergeix uniformement a $f'(u(x))$.

Hem demostrat,per tant, la continuitat de F.

Observació: La continuitat de f no és suficient per a la continuïtat de F com a aplicació de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ en $H^1(\Omega)$: Exemple:

Si $f(x) = \sqrt{|x|} \in C(\mathbb{R})$, $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \subset \mathbb{R}$; llavors $u(x) = \sin x \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$, però $\sqrt{|\sin x|} \notin H^1(\Omega)$.

Malgrat això, provarem posteriorment que sí és suficient per a la continuitat de F com a aplicació de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ en $L^2(\Omega)$.

Teorema 2.6

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, llavors F és diferenciable en el sentit de Fréchet de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ en $H'(\Omega)$ i $DF(u_0)$, aplicació linial acotada de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ en $H^1(\Omega)$ s'obté multiplicant per $f'(u_0(x))$.

Demostració

a) L'aplicació F^* definida per

$$F^*(u_0) : H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}) \to H'(\Omega)$$
$$u \to f'(u_0).u,$$

és linial acotada.

En efecte, és clarament linial.

$$\int_\Omega |f'(u_0(x))u(x)|^2 \leq K^2_{1u_0} |u|^2_2$$

$$\int_\Omega |(f'(u_0(x))u(x))_i|^2 = \int_\Omega |f''(u_0(x))u_{0,i}u + f'(u_0)u_i|^2 \leq$$

$$\leq \int_\Omega |f''(u_0)|^2 |u_{0,i}|^2 |u|^2 + \int_\Omega |f'(u_0)|^2 |u_i|^2 +$$

$$+ 2 \int_\Omega |f''(u_0(x))| f'(u_0(x))| u_{0,i}| |u| |u_i|$$

$$\leq K^2_{2u_0} |u|^2_{C^0(\bar\Omega)} |u_0|^2_2 + K^2_{1u_0} |u|^2_2 + 2K_{2u_0}K_{1u_0} |u|_{C^0(\bar\Omega)} \int \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leq$$

$$\leq C_1 |u|^2_2 + C_2 |u|_2 (\int |u_0|^2)^{1/2} (\int |u_i|^2)^{1/2} \leq C|u|^2_2$$

Per tant

$$|F^*(u_0)u|_1 = |f'(u_0).u|_1 \leq C|u|_2$$

b) $$\lim_{\substack{|u| \to 0 \\ H^2(\Omega)}} \frac{|F(u_0+u) - F(u_0) - F^*(u_0)u|_{H'(\Omega)}}{|u|_{H^2(\Omega)}} = 0$$

Anem a demostrar aquesta asserció. Notem que, com f és contínuament diferenciable, podem escriure, per a $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + \int_0^1 (f'(\alpha + th) - f'(\alpha))hdt$$

Per tant, si $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$f(u_0(x) + u(x)) = f(u_0(x) + f'(u_0(x))u(x) + \int_0^1 (f'(u_0(x) + tu(x)) -$$
$$- f'(u_0(x)))u(x)dt$$

En altres paraules:

$$F(u_0 + u) - F(u_0) - F^*(u_0)u = \int_0^1 (f'(u_0 + tu) - f'(u_0))\ u\ dt$$

Estudiem, doncs, l'expressió:

$$\left| \int_0^1 (f'(u_0 + tu) - f'(u_0))\ u\ dt \right|_1$$

$$\int_\Omega \left| \int_0^1 (f'(u_0+tu) - f'(u_0))u\ dt \right|^2 \leq \int_\Omega \sup_{t \in [0,1]} \left| f'(u_0+tu) - f'(u_0) \right|^2 \left| u \right|^2 dt$$

$$\leq C \sup_{\substack{t \in 0,1 \\ x \in \Omega}} |f'(u_0) + tu) - f'(u_0)|^2 |u|_2^2$$

Pero, com que tu(x) convergeix a 0 per la norma de H^2, convergeix unifornement a 0. Donada la continuïtat de f', tindrem:

$$\sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f'(u_o(x) + tu(x)) - f'(u_o(x))| \xrightarrow[|u|_2 \to 0]{} 0$$

Hem d'acotar ara

$$I: = \left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 (f'(u_o + t_u) - f'(u_o))udt\right)|^2 dx\right)^{1/2}$$

Recordem que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ vol dir derivada distribucional. Els càlculs que segueixen, encara que són, formalment, correctes, s'han de justificar per pas al límit dins $H'(\Omega)$. És a dir, s'han d'agafar primer funcions de $C^1(\bar{\Omega})$, aplicar per elks la tècnica de derivació sota el signe integral i utilitzar, llavors, el fet que $C^1(\bar{\Omega})$ és dens a $H'(\Omega)$.

Utilitzant la desigualtat de Minkowski i el lemma 2.8, tindrem:

$$I \le \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f'(u_o(x) + tu(x) - f'(u_o(x))| \, |u|_2 +$$

$$+ \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f''(u_o(x) + tu(x)) - f''(u_o(x))| \left(\int_\Omega |u_{oi}|^2 \, |u|^2\right)^{1/2}$$

$$+ \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f''(u_o + tu)| \left(\int |u_i|^2 |u|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f'(u_o(x) + tu(x) - f'(u_o(x))| \, |u|_2 +$$

$$+ C \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f''(u_o(x) + f''(u_o(x))| \, |u_o|_2 |u|_2$$

$$+ C \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0,1]}} |f''(u_o + tu)| \, |u|_2^2$$

Però ara, tenint en compte la continuitat de f' i f" ; el fet que existeix un compacte K de $\mathbf{R}$ que conté $u_o(x) + tu(x)$ per a tot $x \in \Omega$ i suposant $|u|_2 < \delta$, obtindrem,

En definitiva: $\forall \varepsilon \ \exists \delta$ tals que si $|u|_2 < \delta$ llavors

$$\left| \int_0^1 (f'(u_0 + tu) - f'(u_0))u\, dt \right|_1 < \varepsilon |u|_2$$

Teorema 2.7

Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, l'aplicació F pertany a $C^1(H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}), H'(\Omega))$ i F i DF envien acotats en acotats.

Demostració

Provem primer que F envia acotats en acotats.

Suposem $u \in B = \{u \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}) : |u|_2 < K_0\}$ i calculem $|F(u)|_1$

Com $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}) \hookrightarrow C(\bar\Omega)$, existeix una constant C tal que $\sup_{x\in\Omega} |u(x)| < CK_0$. Aleshores

$$\int_\Omega |F(u)|^2 = \int_\Omega |f(u(x))|^2 \leq \sup_{\alpha \in [-CK_0, CK_0]} |f(\alpha)|^2 \mu(\Omega)$$

$$\int_\Omega |F_i(u)|^2 = \int_\Omega |f'(u)u_i|^2 \leq \sup_{\alpha \in [-CK_0, CK_0]} |f'(\alpha)|^2 |u|_2^2 \leq$$

$$\leq K_0 \sup_{\alpha \in [-CK_0, CK_0]} |f'(\alpha)|^2$$

Per tant $\quad |F(u)|_1 < K_1 \quad$ si $|u| < K_0$

Demostrem ara que DF envia també acotats en acotats. És a dir, si $|u|_2 < K_0$, llavors

$$|DF(u)|_{L(H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}), H^1(\Omega))} < K_2$$

Recordant la demostració del T 2.6 a) i que $\sup_{x\in} |u(x)| < K_0$, tindrem que si $v \in H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$:

$$|DF(u)v|^2 = |f'(u)v|_1^2 \leq \sup_{\alpha \in [-CK_0, CK_0]} |f'(\alpha)|^2 |v|_2^2 +$$

$$+ C\, K_0^2 \sup_{\alpha\in[-CK_0,CK_0]} |f''(\alpha)|^2|v|_2^2 + \sup_{\alpha\in[-CK_0,CK_0]} |f'(\alpha)|^2|v|_2^2 +$$

$$+ 2CK_0 \sup_{\alpha\in[-CK_0,CK_0]} (f'(\alpha)|,\ |f''(\alpha)|)\ |v|_2^2 < C_4|v|_2^2$$

on C_4 no depèn de u si $|u|_2 < K_0$

Per tant, $|Df(u)| < K_2$ si $|u| < K_0$

Demostrem per últim que DF és contínua, és a dir, que l'aplicació

$$\begin{aligned} DF:\ H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu}) &\longrightarrow L(H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu}),\ H^1(\Omega)) \\ u &\longmapsto f'(u) \end{aligned}$$

és contínua.

Suposem $u_n \to u$ dins $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ i provem que

$|f'(u_n)v - f'(u)v|_1 \leq \varepsilon|v|_2$ amb $\varepsilon \to 0$ quan $n \to \infty$

D'una banda,

$\int|f'(u_n)v - f'(u)v|^2 = \int|f'(u_n) - f'(u)|^2|v|^2 \leq \varepsilon_1^2|v|_2$ amb $\varepsilon_1 \to 0$ perquè $f'(u_n)$ convergeix uniformement a $f'(u)$.

De forma similar:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(f'(u_n)v - f'(u)v)\right|_2 = |(f''(u_n)u_{n,i} - f''(u)u_i)v|_2 +$$

$$+ |(f'(u_n) - f'(u))v_i|_2 \leq |(f''(u_n)u_{n,i} - f''(u_n)u,i)v|_2 +$$

$$+ |(f''(u_n)u_i - f''(u)u_i)v\,| + |(f'(u_n) - f'(u))v_i|_2 \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega}|f''(u_n(x))| \sup_{x\in\Omega}|v(x))|u_n-u|_2 +$$

$$+ \sup_{x\in\Omega}|f''(u_n(x)) - f''(u(x))| \sup_{x\in\Omega}|v(x)||u|_2 + \sup_{x\in\Omega}|f'(u_n(x)) - f'(u(x))|\,.$$

$$.\ |v|_2 \leq \varepsilon_2|v|_2 \quad \text{amb} \quad \varepsilon_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

En aquesta última desigualtat hem utilitzat la convergència uniforme de u_n cap a u i la continuitat de f' i f'', així com la inclusió contínua de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ en $C^0(\bar{\Omega})$.

En definitiva $|Df(u_n) - Df(u)|_{L(H^2,H^1)} \longrightarrow 0$

quan $u_n \to u$ dins $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$. És a dir

$$f \in C^1(H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}), H^1(\Omega))$$

Teorema 2.8

El problema d'evolució següent:

$$\frac{du}{dt} = d\Delta u + F(u), \quad u \in C([0,T],D) \cap C^1([0,T],H)$$

$$u(0) = u_0 \in D$$

on $D = (H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}))^m$, $H = (L^2(\Omega))^m$, $F(u) := f(u) \in C^2(\mathbb{R}^m)$ té una única solució per a tota $u_0 \in D$, i per a tot $T < T^*(u_0)$.

Si $T^*(u_0) < \infty$, $\lim\limits_{T \to T^*} |u|_{C([0,T],D)} = \infty$

La solució $u(t)$ de (14) és diferenciable amb continuitat respecte a u_0.

Demostració

Els teoremes precedents es poden generalitzar fàcilment al cas $m > 1$ (un sistema de reacció-difusió de més d'una equació). Per tant, prenent $M(u) = F(u) - DF(u_0)u$ ens trobem en les hipòtesis dels teoremes 1.2, 1.3, 1.4 i 1.5.

Observem que $L = DF(u_0) + d\Delta$

CONCLUSIO Les equacions d'evolució (14) defineixen en l'espai funcional D un semisistema dinàmic.

OBSERVACIONS

En tota aquesta construcció, hi ha un element que és aparentment, poc natural; ens referim a la necessitat d'introduir l'espai K entre els altres dos espais D i H.

En efecte, d'una banda, D és el domini de l'operador no acotat L i és a D on té sentit l'equació plantejada. Però L pren valors a tot H i per això és necessari parlar de H. La necessitat de donar una topologia a D es fa palesa en voler obtenir teoremes de continuïtat i diferenciabilitat respecte a les condicions inicials.

El problema de fons que ens forçarà a introduir l'espai K és afinar la següent acotació:

$$(*) \quad |Le^{Lt}|_{L(H)} < \frac{c}{t} \qquad t>0$$

Hi ha diversos punts en les demostracions anteriors en què hem utilitzat, implícitament o explícitament, acotacions per $|Le^{Lt}|_{L(H)}$. Esmentem-ne algunes:

a) En el lemma 1.3, per a provar que $\int_0^t e^{L(t-\tau)}f(\tau)d\tau$ pertany a D, hi ha dos camins; o bé considerar la integral a H, i llavors, segons el lemma II 1.2 de FRIEDMAN necessitarem que

$${}_H\int_0^t Le^{L(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

existeixi i l'acotació (*) serà insuficient; o bé considerar-la a D amb la dificultat que l'aplicació

$$t \to e^{Lt}u$$

no és contínua a D i, per això necessitarem que la integral impròpia

$${}_D\int_0^t e^{L(t-\tau)}f(\tau)d\tau$$

convergeixi. Pero l'acotació $|e^{Lt}|_{L(K,D)} < \frac{C}{\sqrt{t}}$ sí que és suficient en aquest contexte.

b) En demostrar la continuitat a D de l'aplicació

$t \to \int_0^t e^{L(t-\tau)} f(\tau)d\tau$, també en el lemma 1.3.

c) Al demostrar l'existència de punt fix de l'aplicació Γ en la demostració d'existència de solucions de l'equació no linial.

En realitat es poden donar resultats semblants als enunciats sense parlar de cap espai intermedi. Per exemple, a TANABE, Cap. 6 es demostra l'existència i unicitat de solucions de l'equació no lineal, pero suposant f definida a tot l'espai H. Això, en el nostre cas, és massa restrictiu. Per exemple, si $f(u) = u^2$, ja no podem definir F a tot H.

En altres textos el que es fa és definir les potències fracccionàries de l'operador L i els dominis d'aquestes potències fraccionàries són espais intermedis entre D i H. Llavors les acotacions són de la forma:

$$|e^{Lt}|_{L(D(A^\alpha),H)} < \frac{c}{t^{1-\alpha}} \quad 0<\alpha<1.$$

Veure FRIEDMAN cap. II 3, II 14, II 16. , Sobolevskii.

Històricament, les potències fraccionàries dels operadors van ser introduïdes en aquest contexte per Sobolevskii amb anterioritat al procediment que utilitzem nosaltres. Sembla clar, pero, que el que és essencial en la teoria de les potències fraccionàries és, també, introduir espais intermedis entre el domini de l'operador D i H. Des d'aquest punt de vista, doncs, el nostre procediment seria més general.

Si be a FRIEDMAN es resol un problema més general que el nostre (és considera l'operador L depenent de t i de u), els resultats són, en algún sentit, més pobres.

Essencialment, la diferència és en que en aquest treball es demostra la continuïtat de la solució a D i la diferenciabilitat respecte a les condicions inicials.

Pel que fa a Iooss tot està orientat a l'equació de Navier-Stokes.

CAPITOL II

ESTABILITAT I BIFURCACIÓ

INTRODUCCIÓ

El principal objecte d'aquest capitol és estudiar l'estabilitat dels punts de repòs del semisistema dinàmic definit al capítol anterior. Aquests punts de repòs corresponen a solucions estacionàries de l'equació d'evolució:

$$\frac{du}{dt} = d\Delta u + F(u) \tag{15}$$

$$u(t) \in D = (H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu}))^m \ , \ F \in C^1(H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial\nu}), H^1(\Omega)),$$

és a dir, a solucions de l'equació

$$d\Delta u + F(u) = 0 \ , \quad u \in D \tag{16}$$

Recordem del capitol I: $F(u)(x) = f(u(x))$.

Notem que les solucions de (16) són solucions en sentit dèbil del sistema de m equacions el.lÍptiques no linials següent:

$$\begin{aligned} d_1\Delta u^1 + f^1(u^1, \dots u^m) &= 0 \\ d_2\Delta u_2 + f^2(u^1, \dots, u^m) &= 0 \\ \\ d_m\Delta u^m + f^m(u^1, \dots, u^m) &= 0 \end{aligned}$$

amb condicions a la frontera de Ω : $\frac{\partial u^i}{\partial\nu}\big|_{\partial\Omega} = 0$, és a dir, condicions de Neumann homogènies.

Demostrarem que l'estabilitat d'aquests punts de repòs ve determinada per l'espectre de la part linial de l'equació (15); és a dir, per la diferencial de Fréchet de $d\Delta u + F(u)$ en el punt $u_0 \in D$ solució de (16). En el capítol anterior vam veure que aquesta diferencial val: $d\Delta + f'(u_0)$.

Concretament, demostrarem que si l'espectre de l'operador linial no acotat $d\Delta + f'(u_0)$ està contingut en el semiplà esquerre de $\mathbb{C}$ i a distància positiva de l'eix imaginari, la solució estacionària de (15), u_0, serà asimptòticament estable. Demostrarem també que si $\sigma(d\Delta + f'(u_0))$ l'espectre conté algun λ amb part real positiva, la solució estacionaria u_0 serà inestable.

La segona part del capítol es dedicarà a estudiar les possibles bifurcacions a noves solucions estacionàries que es poden produir a partir d'un punt de repòs estable. Descrivim ara breument en què consisteix això: suposem que l'equació (15) depèn d'un paràmetre μ , que per a $\mu < \mu_0$ existeix una solució estacionària estable $u(\mu_0)$ i, per a $\mu = \mu_0$, un valor propi $\lambda(\mu)$ simple es fa 0 de manera que $\lambda'(\mu_0) > 0$. Pel criteri d'estabilitat enunciat abans, és clar que $u(\mu_0)$ es torna inestable per a $\mu > \mu_0$. Demostrarem però, que llavors apareix, genèricament, una nova solució estacionària estable $u_1(\mu)$ que es bifurca de $u_0(\mu)$.

Estudiarem, en particular, les solucions bifurcades a partir de punts de repòs de (15) que siguin funcions constants de D. D'aquestes solucions estacionàries en direm homogènies perquè corresponen a distribucions homogènies de u sobre el domini espacial Ω, és a dir, són solucions de (15) constants tant en el temps com en l'espai. Les solucions estacionàries homogènies estaran contingudes en un subespai de dimensió m de l'espai de fases D, de dimensió infinita.

Per l'equació (16) deduim que els punts de repòs homogenis corresponen als zeros de la funció f. És a dir, $u_0 \in D$ és un punt de repòs homogeni de l'equació d'evolució (15) si i només si,

$$\forall x \in \Omega \ , \quad u_0(x) \equiv x_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{amb } f(x_0) = 0$$

En aquest cas, la part linial de l'equació (15) sera $d\Delta + f'(x_0)$. Donarem un mètode per a calcular $\sigma(d\Delta + f(x_0))$.

Les solucions estacionàries bifurcades a partir d'una solució estacionària homogènia estable no seran en general homogènies. Aquest fenomen, és a dir, la bifurcació d'una solució estacionària no homogènia a partir d'una solució estacionària homogènia, és el que en direm morfogènesi.

3. ESTABILITAT DE SOLUCIONS ESTACIONÀRIES

Sigui $u_0 \in D$ una solució estacionària de l'equació:

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = d\Delta u + F(u) \ , \quad u \in C^0([0,T],D) \cap C^1([0,T],H) \\ &u(0) = u_0 \end{aligned}$$

És a dir, $d\Delta u_0 + F(u_0) = 0$

Ens proposem estudiar l'estabilitat d'aquest punt d'equilibri. Per a fer-ho, ens podem reduir al cas $u_0 \equiv 0$ mitjançant el canvi linial: $v(t) = u(t) - u_0$.

L'equació (17) és equivalent a la següent:

$$\frac{dv}{dt} = d\Delta v + d\Delta u_0 + F(v + u_0)$$

Ara dient $\quad L = d\Delta + F'(u_0)$

$$M(v) = F(v + u_0) - F'(u_0) + d\Delta u_0$$

obtindrem:

$$\text{(18)} \qquad \frac{dv}{dt} = Lv + M(v) \qquad v \in C^0(|0,T|,D) \cap C^1(|0,T|,H)$$

on L és un operador linial tancat definit a D dens a H que genera (pel teorema 2.4) un semigrup analític e^{Lt} i $M(v)$ és una aplicació de classe

C^2 de$(H^2(\Omega))^m$ en $(H^2(\Omega))^m$ (és a dir, de D en K), amb les següents propietats:

$$M(o) = 0, \quad DM(o) = 0.$$

Amb aquestes condicions enunciem el següent teorema

<u>Teorema 3.1</u>

Si $\sup_{\lambda \in \sigma(L)} \operatorname{Re} \lambda < -\xi < 0$, llavors la solució nul.la de (18), $v \equiv 0$, és exponencialment estable. Com a conseqüència, la solució u_o de (17) és també exponencialment estable.

Abans de demostrar aquest teorema, provem el seguent lemma:

Sigui $C([0,\infty),D)$ l'espai de funcions contínues acotades a $[0,\infty)$ amb la norma del suprem $|.|_\infty$.

<u>Lemma 3.1</u>

Amb la condició sobre $\sigma(L)$ del teorema anterior, la solució $t \to F_t(u)$ de l'equació (18) amb condició inicial $u \in D$, $|u|_D < \delta$, pertany a $C^2([0,\infty),D)$ si δ és prou petita. A més, fixada t, l'aplicació $u \to F_t(u)$ és de classe C^1 per a cada t.

Com a conseqüència, es tenen resultats similars per a l'equació (17) amb condicions inicials u tals que $|u-u_0| < \delta_1$.

<u>Demostració</u>

Definim

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} : D \times C([0,\infty),D) &\longrightarrow C([0,\infty),D) \\ (u, v(t)) &\longrightarrow v(t) - e^{tL}u - \int_0^t e^{(t-\tau)L} M(v(\tau))d\tau \end{aligned}$$

Primer de tot, $\mathfrak{T}$ està ben definida, és a dir, l'expressió

$$v(t) - e^{tL}u - \int_0^t e^{(t-\tau)L} M(v(\tau))d\tau$$

pertany a $C([0,\infty),D)$

Per a demostrar això, tinguem en compte l'acotació següent per al semigrup, deguda a la condició sobre $\sigma(L)$ i a (11):

$$|e^{Lt}|_{L(K,D)} < C(1+\frac{1}{t})e^{-\xi t} \qquad \forall\ t>0$$

Llavors la demostració que $v(t)-e^{tL}u - \int_0^t e^{L(t-\tau)}M(v(\tau))d\tau$ és contínua en t a tot l'interval $[0,\infty)$ és igual a la demostració del lemma 1.4 .

Veiem ara que $v(t) - e^{tL}u - \int_0^t e^{(t-\tau)L}M(v(\tau))d\tau$ està acotat per a tot $t>0$:

$$\sup_{0\leq t<\infty} \left|\int_0^t e^{(t-\tau)L}M(v(\tau))d\tau\right|_D \leq \int_0^\infty |e^{(t-\tau)L}|_{L(K,D)} \sup_{0<t<\infty}|M(v(\tau))|_K \leq$$

$$\leq K\int_0^\infty \quad (1+\frac{1}{\sqrt{\tau}})e^{-\xi\tau}d\tau < \infty$$

perquè $|v(\tau)|_\infty$ és acotat i M envia acotats en acotats.

Com en el teorema 1.4 es pot demostrar que $\mathfrak{F}$ és una aplicació de classe C^1 i que

$$D_2\mathfrak{F}(u,v(t)) = I - \int_0^t e^{(t-\tau)L}DM(v(\tau))d\tau$$

Aleshores, com $M(o)=0$, tindrem

$$\mathfrak{F}(0,0)=0$$

i, com $DM(0)=0$,

$$D_2\mathfrak{F}(0,0) = I$$

En aquestes condicions podem aplicar el teorema de la funció implícita i obtenir una aplicació:

$$F_t\colon B(0,\delta)\subset D \longrightarrow C([0,\infty),D)$$

tal que $F_t(0)=0$, $(u,F_t(u))=0$, $\forall u\in D$ tal que $|u|<\delta$

És a dir, $F_t(u)$ és la solució de (17), definida $\forall t>0$ si la condició inicial u és $|u|<\delta$. A més, $F_t(u)\in C^1(D,\ C([0,\infty),D))$ i per tant, per cada t, $u \longrightarrow F_t(u)\in D$ és també de classe C^1.

Observem que aixo ens dóna un teorema d'existència, unicitat i dependència respecte a les condicions inicials a un entorn del punt d'equilibri.

Anem ara a demostrar el teorema 3.1.

És clar que si $u_1(t)$ és solució de la següent equació:

$$\text{(19)} \qquad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = L_1 u_1 + M_1(u_1) \qquad u_1 \in C([0,\infty),D) \cap C^1([0,\infty),H) \\ &u_1(0) = \bar{u}_0 \in D \end{aligned}$$

on hem definit $L_1 = L + \frac{\xi}{2} I$, $M_1(u_1) = e^{\xi/2\, t} M(e^{-\xi/2\, t} u_1(t))$.

llavors $u(t) = e^{-\ /2\, t} u_2(t)$ serà solució de:

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = Lu + M(u) \quad , \qquad u \in C([0,\infty),D) \cap C^1([0,\infty),H) \\ &u(0) = \bar{u}_0 \in D \end{aligned}$$

Demostrem, doncs, que existeix una única solució de (19) si $|\bar{u}_0|_D$ és prou petita.

Per a veure això només cal repetir el raonament de la demostració del lemma 3.1. Observem, per exemple, que M_1 aplica $C([0,\infty),D)$ contínuament en $C([0,\infty),H)$ i envia acotats en acotats. En efecte:

Com que $DM(0) = 0$, existeix δ_1 tal que

$$|M(u)|_K < |u|_D \qquad \text{si} \quad |u|_D < \delta_1$$

Sigui ara $v(t) \in C([0,\infty),D)$, $|v|_\infty < C$.

Llavors existeix un T tal que

$$\sup_{t>T} |e^{-\xi/2\, t} v(t)|_D = \sup_{t>T} e^{-\xi/2\, t} |v(t)|_D \leq Ce^{-\xi/2\, t} < \delta_1$$

I, per tant,

$$\sup_{t>T} |M_1(v(t))|_K = \sup_{t>T} e^{\xi/2\, t} |M(e^{-\xi/2\, t} v(t))|_K \leq \sup_{t>T} |v(t)|_D < C.$$

Com que a interval $[0,T]$ l'aplicació

$$u(t) \longrightarrow e^{\xi/2\, t} M(e^{-\xi/2\, t} u(t))$$

envia acotats en acotats (de $C([0,T],D)$ en $C([0,T],H)$), tindrem, en definitiva

$$|M_1(v)|_\infty < C$$

La continuitat de M_1 és evident.

Les restants hipòtesis, és a dir, que DM_1 és contínua i envia acotats en acotats, són també molt senzilles de provar.

Per tant, podem deduir que existeix $u_1(t)$, solució de (19) i, per tant, $|u_1|_\infty < \infty$.

Es per això que, si $|\bar{u}_0| < \delta$, la solució $u(t)$ de (20) existeix per a tot $t > 0$ i a més:

$$|u(t)|_D = e^{-\xi/2\, t}\, |u_1|_\infty$$

És a dir, la solució nul.la de (18) és exponencialment estable.

Com a conclusió, la solució estacionària u_0 de (17) és també exponencialment estable.

Demostrarem ara que l'espectre de L és purament puntual, és a dir, que si Nuc $(L - \lambda I) = \{0\}$, llavors $(L - \lambda I)^{-1}$ existeix i està acotat. Recordem que $L = d\Delta + F'(u_0)$ és suma d'un operador diagonal definit a D, subespai dens de H, i d'un operador acotat $F'(u_0)$. Utilitzarem els següents lemmes:

Lemma 3.2

L'espectre de Δ com a operador amb domini $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})$, dens a $L^2(\Omega)$ és purament puntual.

Resultats molt més forts que aquests (més generals), es poden trobar, per exemple a BEREZANSKII,T 3.5

Lemma 3.3

Si λ no pertany a l'espectre de Δ, l'operador $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ és compacte en $L^2(\Omega)$.

Demostració Per hipòtesi, $(\Delta-\lambda I)^{-1}$ és acotat en $L^2(\Omega)$. Demostrem, a més, que és acotat com a operador de $L^2(\Omega)$ en $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ (la norma de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu})$ és equivalent a la norma del graf perquè $\Delta-\lambda I$ és tancat).

En efecte: sigui $v \in L^2(\Omega)$

$$|(\Delta-\lambda I)^{-1}v|_2 \leq C_1(|(\Delta-\lambda I)^{-1}v|_0 + |(\Delta-\lambda I)(\Delta-\lambda I)^{-1}v|_0) \leq$$

$$\leq C_1(C_2|v|_0 + |v|_0) < k|v|_0 .$$

Ara, aplicant el lemma de Rellich (veure FRIEDMAN T I 11.2) $(\Delta-\lambda I)^{-1}$ és compacte a $L^2(\Omega)$ perquè la inclusió

$$H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial\nu}) \subsetneq L^2(\Omega)$$

és compacte.

Lemma 3.4

L'espectre de $d\Delta$ (operador definit densament a $H=(L^2(\Omega))^m$) és purament puntual i està contingut a $(-\infty,0]$.

A més, l'operador $A = \begin{pmatrix} d_1\Delta+\varepsilon & & & \\ & d_2\Delta+\varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m\Delta+\varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon>0$ és tal que A^{-1} és compacte.

La demostració és evident aplicant els lemmes 3.2 i 3.3. i el corol.-lari 2.1 i recordant que tots els di són positius o nuls.

Teorema 3.2

L'espectre de $L=d\Delta+F'(u_0)$ és purament puntual.

Demostració

Podem escriure $L=A+F'(u_0)-\varepsilon I$ on $A= \Delta+\varepsilon I$ és un operador diagonal amb domini D tal que A^{-1} és compacte i $F'(u_0)-\varepsilon I$ és un operador acotat.

Provarem que $\mathrm{Nuc}(L - \lambda I) = 0$ implica que $(L - \lambda I)^{-1}$ és acotat.

Demostrarem el següent fet general:

"Sigui A un operador linial densament definit a H tal que A^{-1} és compacte i B un operador acotat a H. Aleshores $\mathrm{Nuc}(A+B) = \{0\} \Rightarrow (A+B)^{-1}$ definit a tot H i acotat".

La hipòtesi que $A+B$ sigui injectiu implica que $I + A^{-1}B$ és també injectiu. Pero $A^{-1}B$ és compacte. Llavors la teoria de Fredholm ens assegura que $I + A^{-1}B$ té invers acotat. Provem ara que $(I+A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (A+B)^{-1}$.

D'una banda, $\forall v \in \mathrm{Dom}(A)$ es té:

$$(I+A^{-1}B)^{-1}A^{-1}(A+B)v = (I+A^{-1}B)^{-1}(I+A^{-1}B)v = v$$

D'altra banda volem demostrar

$$(A+B)(I+A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = I$$

Això últim es equivalent a demostrar que, per a qualsevol $v \in \mathrm{Dom}(A)$

$$(A+B)(I+A^{-1}B)^{-1}v = Av$$

Sigui $w = (I+A^{-1}B)^{-1}v$. Llavors

$$(I+A^{-1}B)w = v$$

i per tant $w \in \mathrm{Dom}(A)$. Aplicant $A+B$:

$$(A+B)w + (A+B)A^{-1}Bw = (A+B)w + Bw + BA^{-1}Bw = Av + Bv$$

$$(A+B)w + B(I+A^{-1}B)w = Av + Bv$$

O sigui, $(A+B)w = (A+B)(I+A^{-1}B)^{-1}v = Av$.

Per tant, $(A+B)^{-1}$ és acotat perquè és composició de dos acotats.

En el nostre cas, $(L-\lambda I)^{-1} = (A+B)^{-1}$ és acotat si λ no és valor propi.

El comportament asimptòtic prop d'un punt de repòs, quan la clausura de σ no conté valors imaginaris, ve donat per la part linial de L i existeixen les varietats estable i inestable (vegi's Iooss Cap. VII). En el nostre cas només necessitarem:

Teorema 3.3

Si $\sigma(L)$ conté un valor propi amb part real positiva, la solució nul.la és inestable.

Demostració

Per hipòtesi existeix un $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 > 0$ i un vector $u = u_1 + iu_2 \in H_{\mathbb{C}}$ (espai complexificat de H) tals que

$$Lu = \lambda u$$

Això implica, en particular, $e^{Lt}u = e^{\lambda t}u$.

Es clar que $\bar{\lambda}$ és també valor propi de L, de vector propi $u_1 - iu_2 = \bar{u}$. Per tant $v = u + \bar{u} = 2u_1 \in H$. A més

$$e^{Lt}v = e^{Lt}(u+\bar{u}) = e^{\lambda t}u + e^{\bar{\lambda}t}\bar{u} = e^{\lambda_1 t}(e^{i\lambda_2 t}u + e^{-i\lambda_2 t}\bar{u}) =$$

$$= e^{\lambda_1 t}(\cos \lambda_2 tv + i \sin \lambda_2 t(u-\bar{u})) = e^{\lambda_1 t}(\cos \lambda_2 tv - 2i \sin \lambda_2 tu_2)$$

Llavors existeix un natural N tal que

$$|e^{LN}v|_D > e^{\lambda_1/2\,N}|v|_D \quad . \quad \text{Fixem-nos que } e^{\lambda_1/2} > 1.$$

Observem que aquesta desigualtat és certa per a tot $\alpha \cdot v$, $\alpha \in \mathbb{R}$. És a dir, podem prendre $|\alpha v|$ tan petita com volguem.

Aplicant el teorema 1.4, si diem $F_t(v)$ al flux amb condició inicial v, tenim:

$$F_t(v) = F_t(0) + DF_t(0)v + R_t(v), \quad \lim_{v \to 0} \frac{|R_t(v)|_D}{|v|_D} = 0$$

Però com $F_t(0) = 0$, $DF_t(0) = e^{Lt}$ (corol.lari 1.1), deduïm el següent:

$$\forall \varepsilon, 0 \;\exists\; \eta > 0: \quad |F_N(\alpha v) - e^{LN}\alpha v|_D < \varepsilon|v|_D \quad \text{si } |\alpha v| < \eta$$

Prenem ε tal que $\rho_1 = e^{\lambda_1 N/2} - \varepsilon > 1$.

Llavors per a tot α tal que $|\alpha v| < \eta$ tindrem

$$|F_N(\alpha v)|_D > |e^{LN}\alpha v|_D - \varepsilon|v|_D > (e^{\lambda_1 N/2} - \varepsilon)|\alpha v|_D$$

És a dir $|F_N(\alpha v)|_D > \rho_1 |\alpha v|_D$

Estem suposant que $F_t(\alpha v)$ existeix per a tot $t > 0$, car en cas contrari tindríem $\sup\limits_{t > T} |F_t(\alpha v)|_D = \infty$ i 0 no seria estable.

Si $|F_N(\alpha v)| > \eta$, 0 és inestable. Suposem doncs $|F_N(\alpha v)| < \eta$. Llavors tindrem:

$$|F_{2N}(\alpha v)| > \rho_1 \; |F_N(\alpha v)| > \rho_1^2 |\alpha v|_D$$

I així successivament tindrem

$$|F_{KN}(\alpha v)| > \rho_1^k |\alpha v|_D$$

Pero és clar que existeix un $k > 0$ tal que $\rho_1^k |\alpha v|_D > \eta$. Llavors 0 és un punt de repòs inestable perquè, $\forall \eta' > 0$ podem trobar $v \in D$ tal que

$$|\alpha v|_D < \eta' \quad \text{i} \quad |F_t(\alpha v)|_D > \eta \quad \text{per algún } t.$$

(és a dir, la bola $B(0,\eta)$ H no conté cap bola $B(0,\eta')$ tal que $F_t(B(0,\eta')) \subset B(0,\eta)$ $\forall t > 0$).

Resumint:

Teorema 3.4 (Principi d'estabilitat linial)

Una solució estacionària u_0 de (17) és asimptòticament estable si l'espectre de l'operador linial $D_u(d\Delta u + F(u)) = d\Delta + F'(u)$ està contingut a l'esquerra de l'eix imaginari i a distància no nula d'aquest; és inestable si conté algún punt amb part real positiva.

La demostració d'aquest teorema es redueix a aplicar els teoremes 3.1, 3.2 i 3.3.

Ens resta ara donar un algorisme per al càlcul dels valors propis de l'operador $d\Delta + F'(u)$. Per això, vegi's PERELLÓ. En l'article esmentat es demostra que ρ és valor propi de L si i només si existeix un λ_i de l'espectre de Δ tal que

$$\det(F'(u_0) - \lambda_i \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots d_m) - \rho I) = 0$$

Observi's que $F'(u_0) - \lambda_i \mathrm{diag}(d_1, \ldots d_m) - \rho I$ és una matriu $m \times m$.

Si existeix un únic λ_i que satisfà la condició anterior, λ_i és valor propi simple de Δ i el rang de $F'(u_0) - \lambda_i \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m) - \rho I$ és $m-1$, llavors ρ és un valor propi simple de L. És a dir,

$$\dim \mathrm{Nuc}(L - \rho I) = 1$$

En aquesta situació, si ϕ_i és la funció pròpia de valor propi λ_i de Δ, el subespai $\mathrm{Nuc}(L - \rho I)$ ve generat pel vector $(-a_1\phi_i, a_2\phi_i, \ldots a_m\phi_i) \in H_{\mathbb{C}}$ on $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ és un vector propi de valor propi 0 de la matriu $F'(u_0) - \lambda_i \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots d_m) - \rho I$.

Demostrarem ara un teorema que utilitzarem més tard:

<u>Lemma 3.5</u>

Sigui A densament definit a H, A^{-1} compacte i B acotat. Llavors l'operador $A + B$ compleix l'alternativa de Fredholm, és a dir,
$R(A + B) = (\mathrm{Nuc}(A^* + B^*))^{\perp}$

<u>Demostració</u>

És evident que $R(A+B) \subset (\mathrm{Nuc}(A^* + B^*))^{\perp}$, Provem doncs que $(\mathrm{Nuc}(A^* + B^*))^{\perp}$ està contingut a $R(A+B)$.

Sigui $v \in H$ tal que $(v,x) = 0 \quad \forall x \in N(A^* + B^*)$.

Sigui $y \in \mathrm{Nuc}(I + (A^{-1}B)^*)$, és a dir, tal que $(A^{-1}B)^*y + y = 0$ i per tant $B^*(A^{-1})^* y + y = 0$.

O sigui $(A^{-1})^*y \in N(A^* + B^*)$ perquè $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Llavors $(A^{-1}v, y) = (v, (A^{-1})^*y) = 0$

Fins ara hem provat doncs que si $v \in (\mathrm{Nuc}(A^* + B^*))^{\perp}$ llavors $A^{-1}v \in (\mathrm{Nuc}(I + (A^{-1}B))^{\perp}$.

Com $A^{-1}B$ és compacte, de l'alternativa de Fredholm:

$$(\mathrm{Nuc}(I + (A^{-1}B)^*)^{\perp} = R(I + A^{-1}B)$$

Com a conseqüència, $A^{-1}v = (I + A^{-1}B)u$ per algún $u \in H$ que haurà de ser també de Dom A car el rang de A^{-1} és Dom A.

Aplicant A a l'última igualtat:

$$v = Au + Bu \Rightarrow v \in R(A+B)$$

És a dir:

$$(\mathrm{Nuc}(A^* + B^*))^{\perp} \subset R(A+B)$$

<u>Teorema 3.5</u>

Si λ és un valor propi de L, $\mathrm{Rang}(L - \lambda I) = (\mathrm{Nuc}(L^* - \bar{\lambda} I))^{\perp}$ i $\dim \mathrm{Nuc}(L - \lambda I) = \mathrm{codim}\, R(L - \lambda I)$.

Si $\dim \mathrm{Nuc}(L - \lambda I) = 1$, direm que λ és un valor propi simple.

<u>Demostració</u>

$L - \lambda I$ és suma d'un operador $A = d\Delta + \varepsilon I$ densament definit i d'invers compacte i d'un operador $B = F'(u_0) - \lambda I - \varepsilon I$ acotat. Per tant, del lemma anterior,

$$\mathrm{Rang}(L - \lambda I) = (\mathrm{Nuc}(L^* - \bar{\lambda} I))^{\perp}$$

Com $\dim \mathrm{Nuc}(L^* - \bar{\lambda} I) = \dim \mathrm{Nuc}(L - \lambda I)$ tindrem que

$$\dim \mathrm{Nuc}(L - \lambda I) = \mathrm{codim}\, R(L - \lambda I).$$

4. BIFURCACIÓ D'UN VALOR PROPI SIMPLE

En aquesta secció demostrarem l'aparició d'una bifurcació d'una solució estacionària quan un valor propi simple de la part linial d'aquesta equació creui per l'origen mentre tots els altres es mantenen a l'esquerra de l'eix imaginari i a distància positiva d'aquest. El procediment que utilitzarem rep el nom de Mètode de Lyapunov-Schmidt o dels problemes alternatius.

Siguin D i H espais de Hilbert reals, D densament inclòs en H i la inclusió contínua.

Sigui $G : \mathbb{R} \times D \longrightarrow H$ una aplicació de classe C^2. Suposem que $G(\mu,0) = 0$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$. D'acord amb el que hem vist anteriorment, aixo no resta generalitat.

Llavors $u \equiv 0$ és una solució estacionària (un punt d'equilibri) de la següent equació d'evolució:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = G(\mu,u) & u(t) \in C^2([0,\tau],H) \\ u(0) = u_o \in D \end{cases}$$

Denotem $L(\mu,u) = D_u G(\mu,u)$; operador linial amb domini D dens a H. Suposem que L es troba en les hipòtesis del capítol anterior. En aquesta situació, l'equació defineix un semisistema dinàmic.

Suposem que $\sigma(L)$ (entenent ara L com a operador a l'espai complexifixat de H) està contingut a l'esquerra de l'eix imaginari i a distància positiva d'aquest, per a $\mu < 0$. Aleshores, la solució $u \equiv 0$ és exponencialment estable. A més, com $L(\mu,0)$ és invertible, el teorema de funció implícita assegura la unicitat de solucions de $G(\mu,u) = 0$ en un entorn de $u = 0$.

Suposem que l'operador $L(\mu,u)$ és del tipus de Fredholm, és a dir, tal que

$$R(L-\lambda I) = (\mathrm{Nuc}\ (L^*-\bar{\lambda} I))^{\perp}$$
$$\dim \mathrm{Nuc}\ (L-\lambda I) = \dim \mathrm{Nuc}\ (L^*-\bar{\lambda} I)$$

Suposem també que, per $\mu = 0$, si denoten $L_o = L(0,0)$,

$$N = \mathrm{Nuc}\ L_o = [\varphi_o] \qquad \varphi_o \in H \ , \ |\varphi_o| = 1$$
$$\mathrm{Nuc}\ L_o^* = [\varphi_o^*] \qquad \varphi_o^* \in H \ , \ |\varphi_o^*| = 1$$

$$R = \mathrm{Rang}\ L_o = \{u \in H \mid (u,\varphi_o^*)_H = 0\}$$
$$(\varphi_o, \varphi_o^*)_H \neq 0$$

(en aquesta situació direm que 0 és un valor propi simple de L_0).

Suposem, per últim, que, dient $\lambda(\mu)$ al valor propi de part real més grossa de $L(\mu,0)$, $\lambda'(0) > 0$.

Sota aquestes hipòtesis demostrarem el següent:

<u>Teorema 4.1.</u>

Existeix una corba de classe C^1

$$\alpha \in (-\varepsilon,\varepsilon) \longmapsto (\mu(\alpha),\ u(\alpha)) \in \mathbb{R} \times D$$

tal que:

$$(\mu(0),\ u(0)) = (0,0)$$

$$u'(o) = \varphi_0$$

$$G(\mu(\alpha),\ u(\alpha)) = 0 \qquad \forall\alpha \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

és a dir, apareix, per a cada α , una solució estacionària que bifurca de

$$\mu \equiv 0 \ \text{ per } \ \mu = 0$$

<u>Demostració</u>

Definim les següents projeccions:

$$P_1 : D \longrightarrow N$$
$$x \longmapsto (x,\varphi_0)\,\varphi_0$$

$$P_1 : H \longrightarrow [\varphi_0^*]$$
$$y \longmapsto (y,\varphi_0^*)\,\varphi_0^*$$

i diem $Q_1 = I-P_1$, $Q_2 = I-P_2$. Fixem-nos que Q_2 projecta H sobre $RL_0 = R$.

Tota $u \in D$ es pot escriure $u = (u\varphi_0)\varphi_0 + Q_1 u = \alpha\varphi_0 + \psi$

Podem descomposar l'equació $G(\mu,u) = 0$:

$$(22)\ \begin{cases} Q_2 G(\mu,\alpha\varphi_0+\psi) = 0 \\ P_2 G(\mu,\alpha\varphi_0+\psi) = 0 \end{cases}$$

Definirem ara una aplicació H :

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times Q_1 D \longrightarrow R$$

$$(\mu, \alpha, \psi) \longmapsto Q_2 G(\mu, \alpha \varphi_0 + \psi)$$

És clar que H és de classe C^2 i que $H(\mu,0,0) = Q_2 G(\mu.0) = 0$.

En particular $H(0,0,0) = 0$.

A més, $D_\psi H(0,0,0) = Q_2 L_0$ és un isomorfisme entre $Q_1 D$ i R (és bijectiva, contínua i lineal per la qual cosa, el teorema de l'aplicació oberta implica que la inversa és també contínua).

Podem, doncs, aplicar el teorema de funció implícita per a obtenir una aplicació de classe C^2

$$\psi : U \times V \rightarrow Q_1 D$$

$$(\mu, \alpha) \longmapsto \psi(\mu, \alpha)$$

(U i V entorns de 0 a $\mathbb{R}$)

tal que

$$\psi(0,0) = 0$$

$$H(\mu, \alpha, \psi(\mu,\alpha)) = 0 \quad \text{per} \quad (\mu,\alpha) \in U \times V$$

Per unicitat de ψ tindrem que $\psi(\mu,0) = 0$, $\forall \mu \in U$.

A més, es compleix la següent propietat: $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0,0) = 0$

En efecte, derivant l'equació

$$H(\mu,\alpha)\psi(\mu,\alpha)) \; . \; Q_2 G(\mu, \alpha\varphi_0 + Q_1\psi(\mu,\alpha)) \equiv 0$$

respecte α obtenim :

$$Q_2 L(\mu, \alpha\varphi_0 + Q_1\psi(\mu,\alpha)) \; . \; (\varphi_0 + Q_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(\mu,\alpha)) \equiv 0 \; .$$

Avaluant a $(0,0)$:

$$Q_2 L(0,0)\varphi_0 + Q_2 L(0,0) Q_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0,0) = 0$$

Com $\varphi_0 \in \text{Nuc}\, L_0$ i Q_2 és la projecció sobre RL_0 :

$$L_0 Q_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0,0) = 0$$

I per tant $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0,0) = 0$

Substituint $\psi(\mu,\alpha)$ en la segona equació de (22) obtenim:

$$P_2 G(\mu,\alpha\varphi_0 + \psi(\mu,\alpha)) = 0 \text{ . És a dir:}$$

$$(G(\mu,\alpha\varphi_0 + \psi(\mu,\alpha)),\varphi_0^*) = 0$$

Aquesta última equació escalar anomenada "equació de bifurcació" és equivalent, com hem vist, al sistema (22) en un entorn de $\mu = 0$.

Definim ara una aplicació

$$F : U \times V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mu,\alpha) \longmapsto (G(\mu,\alpha\varphi_0 + \psi(\mu,\alpha)),\varphi_0^*)$$

F és de classe C^2 i compleix, per a tota $\mu \in U$:

$$F(\mu,0) = (G(\mu,0),\varphi_0^*) = 0$$

Llavors, si definim

$$g(\mu,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{F(\mu,\alpha)}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}(\mu,0) & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

resulta ser una aplicació de $U \times V$ en $\mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$g(0,0) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = 0$$

Aplicarem el teorema de funció implícita a la funció g en un entorn del (0,0). Hem d'avaluar $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0)$.
Però, de la definició de g tenim que $\frac{\partial g}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\mu}(0,0)$.

Calcularem aquesta última derivada :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\mu,\alpha) = (L(\mu,\alpha\varphi_0 + \psi(\mu,\alpha))\,(\varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\mu,\alpha))\ ,\ \varphi_0^*)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\mu,0) = (L(\mu,0)(\varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(\mu,0))\ ,\ \varphi_0^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\frac{\partial F}{\partial \alpha})(0,0) = (\,D_{u\mu}G(0,0)(\varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}(0,0) + L(0,0)\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial\alpha\partial\mu}(0,0),\varphi_0^*) =$$

$$= (D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*)\ .$$

Si suposem $(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) \neq 0$ podrem aplicar el teorema de fun- ció implícita i obtenir una nova aplicació

$$\mu : (-\varepsilon,\varepsilon) \subset V \subset \mathbb{R} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}$$
$$\alpha \longmapsto \mu(\alpha)$$

de classe C^1 i tal que $\mu(0) = 0$, $g(\mu(\alpha),\alpha) = 0$, $\forall\alpha \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ i, en conseqüència, $F(\mu(\alpha),\alpha) = 0$, $\forall\alpha \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Aleshores l'aplicació $\alpha \longmapsto \psi(\mu(\alpha),\alpha)$ és també de classe C^1 i per tant

$$u : (-\varepsilon,\varepsilon) \subset V \longrightarrow D$$
$$\alpha \longmapsto \alpha\varphi_0 + \psi(\mu(\alpha),\alpha)$$

també.

Relacionem, per últim, la condició $(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) \neq 0$ amb la hipòtesi, que encara no hem utilitzat, $\lambda'(0) > 0$.

Tenim

$$L(\mu,0)\varphi(\mu) = \lambda(\mu)\varphi(\mu)$$

on $\varphi(\mu)$ és el vector propi corresponent a $\lambda(\mu)$. Derivant i avaluant a $\mu = 0$:

$$D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0 + L_0\varphi'(0) = \lambda'(0)\varphi_0$$

Multiplicant escalarment per φ_0^* i tenint en compte que $RL_0 = [\varphi_0^*]^\perp$ i que $(\varphi_0,\varphi_0^*) \neq 0$:

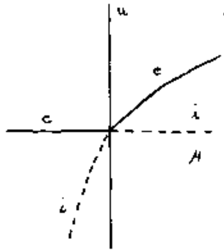
$$(23) \quad \lambda'(0) = \frac{(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)}$$

Per tant, com hem suposat $\lambda'(0) > 0$ tindrem

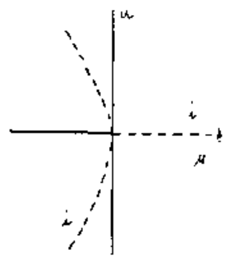
$$(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) \neq 0$$

A més, la igualtat ens dóna una condició computable directament.

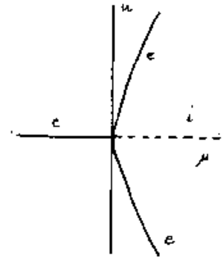
Notem que, un diagrama de bifurcació en què aparexi la corba $(\mu(\alpha), u(\alpha))$ podrà tenir un dels tres aspectes següents:



si $\mu'(0) \neq 0$
diagrama 1



$\mu'(0) = 0$
diagrama 2



$\mu'(0) = 0$
diagrama 3

Estabilitat de les solucions bifurcades

Per a determinar l'estabilitat de les solucions bifurcades, estudiarem el comportament del valor propi crític σ (el de part real més grossa) de $L(\mu(\alpha), u(\alpha))$, és a dir, al llarg de les branques bifurcades.

En tot el que segueix, necessitarem que $L(\mu(\alpha),\mu(\alpha))$ sigui de classe C^2 en α, i segons la demostració anterior, haurem d'exigir que G sigui de classe C^3 entre D i H.

Provarem en primer lloc que el sistema d'equacions

$$(24) \quad \begin{cases} L(\mu(\alpha),u(\alpha))\varphi - \sigma\varphi = 0 \\ (\varphi,\varphi) = 1 \end{cases}$$

defineix, implícitament, una aplicació $\alpha \longmapsto \sigma(\alpha)$ de classe C^2 tal que $\sigma(0) = 0$. Observi's que (4) implica que σ és un valor propi de $L(\mu(\alpha),u(\alpha))$ i φ és la seva funció propia normalitzada. El fet $\sigma(0) = 0$ ens diu que $\sigma(\alpha)$ serà precisament el valor propi crític.

Definirem la següent aplicació:

$$(-\varepsilon,\varepsilon) \times \mathbb{R} \times D \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R} \times H$$

$$(\alpha,\sigma,\varphi) \longmapsto ((\varphi,\varphi) - 1,\ D_u G(\mu(\alpha),u(\alpha))\varphi - \sigma\varphi)$$

D i H presos com a espais de Banach sobre $\mathbb{R}$.

És immediat de comprovar que Φ és de classe C^2.

Tenim la següent propietat:

$$\Phi(0,0,\varphi_0) = (0,L_0\varphi_0) = (0,0)\ .$$

$$D_{\sigma,\varphi}\Phi(0,0,\varphi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\varphi_0,.)_H \\ -\varphi_0 & L_0 \end{pmatrix},$$

Fixem-nos que $D_{\sigma\varphi}\Phi(0,0,\varphi_0) \in L(\mathbb{R} \times D, \mathbb{R} \times H)$

Si demostrem que $D_{\sigma\varphi}\Phi(0,0,\varphi_0)$ és un homeomorfisme, podrem aplicar el teorema de funció implícita per a obtenir una aplicació de classe C^1:

$$\alpha \in (-\varepsilon',\varepsilon') \xmapsto{T} (\sigma(\alpha),\varphi(\alpha)) \in \mathbb{R} \times D$$

que ens donarà, per a cada valor de α el valor propi crític σ i la funció propia φ de norma 1 de σ.

<u>Injectivitat</u>. Suposem $(\lambda,u) \in D$ tal que $D_{\sigma\varphi}\Phi(0,0,\varphi_0)(\lambda,u) = 0$.

Això implica $\begin{cases} (\varphi_0,u) = 0 \\ -\lambda\varphi_0 + L_0 u = 0 \end{cases}$

De la segona equació, tindrem $\lambda = 0$ (perquè $R(L_0) = \{u \in H :$

$$:(u,\varphi_0^*) = 0\} \quad \text{i} \quad (\varphi_0,\varphi_0^*) \neq 0)\ .$$

Llavors $u \in \operatorname{Nuc} L_0$ i d'això es dedueix, mitjançant la primera equació, que $u = 0$.

<u>Exhaustivitat</u>. Suposem $\nu \in \mathbb{R}$ i $w \in H$. Hem de resoldre

$$\begin{cases} (\varphi_0,v) = \nu \\ L_0 v - \sigma\varphi_0 = w \end{cases} \quad \text{per } \sigma \in \mathbb{R},\ v \in D$$

Per l'alternativa de Fredholm, la segona equació és resoluble si i només si :

$$(\sigma\varphi_0 + w, \varphi_0^*) = \sigma(\varphi_0, \varphi_0^*) + (w, \varphi_0^*) = 0$$

És a dir, si $\sigma = -\dfrac{(w,\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)}$.

Sigui v una solució qualsevol de

$$L_0 v = w - \frac{(w,\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)}\varphi_0 \quad .$$

És clar que qualsevol $v' = v + \beta\varphi_0$, $\beta \in \mathbb{R}$ és solució de l'equació anterior. Escollim, doncs, β perquè es satisfaci també $(\varphi_0, v') = \nu$.

És a dir : $(\varphi_0, v + \beta\varphi_0) = \nu$. D'on

$$(\varphi_0, v) + \beta = \nu \Rightarrow \beta = \nu - (\varphi_0, v) \quad .$$

Per tant, hem trobat una parella $(\sigma, v') \in \mathbb{R} \times D$ tals que

$$\sigma = -\frac{(w,\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)}$$

$$v' = v + \nu\varphi_0 - (\varphi_0, v)\varphi_0$$

$$D\Phi(0,0,\varphi_0)\binom{\sigma}{v'} = \binom{\nu}{w}$$

Hem provat, doncs, l'exhaustivitat.

Com $D\Phi(0,0,\varphi_0)$ és acotada, el teorema de l'aplicació oberta ens diu que és un homeomorfisme. Per tant, aplicant el teorema de funció implícita, obtenim l'aplicació T .

Avaluarem ara la derivada de $\sigma(\alpha)$ en un entorn de $\alpha = 0$. Per això, derivem la primera equació de (24) suposant $\sigma = \sigma(\alpha)$, $\varphi = \varphi(\alpha)$. Advertim que en els càlculs que segueixen ens permetem un petit abús de notació per a escurçar el text.

(25)

$$D_{u\mu} G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu'(\alpha)\varphi(\alpha) + D_{uu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\ (u'(\alpha),\varphi(\alpha)) +$$

$$+ D_uG(\mu(\alpha),u(\alpha))\varphi'(\alpha) - \sigma'(\alpha)\varphi(\alpha) - \sigma(\alpha)\varphi'(\alpha) = 0 \quad \forall\alpha \in (-\varepsilon',\varepsilon')$$

Avaluem aquesta derivada a $\alpha = 0$ i multipliquem-la escalarment per φ_0^* :

$$\mu'(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) + (D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) +$$

$$+ (L_0\varphi'(0),\varphi_0^*) - \sigma'(0)(\varphi_0,\varphi_0^*) = 0$$

Hem tingut en compte $\varphi(0) = \varphi_0$

$$\sigma(0) = 0$$

$$u'(0) = \varphi_0$$

Com Rang $L_0 = \{\varphi_0^*\}^\perp$:

(26) $(\varphi_0,\varphi_0^*)\ \sigma'(0) = \mu'(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) + (D_{u\mu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*)$

Utilitzem ara la condició $G(\mu(\alpha),u(\alpha)) = 0$ per a reduir aquesta expressió.

Derivant dues vegades $G(\mu(\alpha),u(\alpha))$, s'obté :

(27) $D_{\mu\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha)(\mu'(\alpha))^2 + 2D_{u\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu'(\alpha)u'(\alpha) +$

$+ D_\mu G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu''(\alpha) + D_{uu}G(\mu(\alpha),u(\alpha)(u'(\alpha),u'(\alpha)) +$

$+ D_uG(\mu(\alpha),u(\alpha))u''(\alpha) = 0 \quad , \quad \forall\alpha \in (-\varepsilon',\varepsilon')$

Avaluant a zero, i tenint en compte les següents igualtats :

$$D_{\mu\mu}G(0,0) = D_\mu G(0,0) = 0 \quad , \quad u'(0) = \varphi_0$$

(28) $2\mu'(0)\quad D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0 + D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0) + L_0\ u''(0) = 0$

Multiplicant escalarment per φ_0^* :

(29) $2\mu'(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) + (D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) = 0$

De (26) i (29) obtenim

$$(\varphi_0,\varphi_0^*)\sigma'(0) = -\mu'(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*)$$

És a dir :

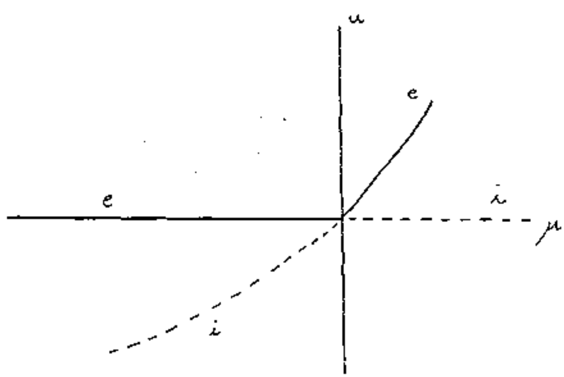
$$(30)\quad \sigma'(0) = -\mu'(0)\ \frac{D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)} = -\mu'(0)\lambda'(0)$$

Podem enunciar, doncs, el següent teorema.

Teorema 4.2.

En les hipòtesis del teorema 4.1., si $\mu'(0) \neq 0$, el diagrama de bifurcació és del tipus 1, és a dir, només hi ha una solució bifurcada per a cada valor de $\mu \in (-\delta,\delta)$ i a més la solució bifurcada és estable si $\mu > 0$ (branca supercrítica) i és inestable si $\mu < 0$ (branca subcrítica).

És a dir, el diagrama de bifurcació és així :



La demostració d'aquest teorema és ara evident, car, de (30), com $\lambda'(0) > 0$, tenim que el signe de $\sigma'(0)$ és l'oposat del de $\mu'(0)$, és a dir, negatiu si $\mu'(0) > 0$ i positiu si $\mu'(0) > 0$. En un entorn de $\alpha = 0$ (i per tant en un entorn de $\mu = 0$), $\mu(0) > 0$ si $\alpha > 0$, implica $\mu'(0) > 0$ i $\sigma'(0) < 0$ implica que el valor propi crític σ es fa negatiu. Aleshores, com tots els altres valors propis de $L(\mu(\alpha),u(\alpha))$ es mantindran amb part real negativa, tindrem l'estabilitat de la branca supercrítica.

Igualment es prova la inestabilitat de la branca subcrítica.

Recordem que les condicions $\lambda'(0) > 0$ i $\mu'(0) \neq 0$ són directament computables a partir de l'equació :

$$\lambda'(0) = \frac{(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0, \varphi_0^*)}{(\varphi_0, \varphi_0^*)}$$

I si $\lambda'(0) > 0$, (29) ens diu que $\mu'(0) \neq 0$ és equivalent a

$$(D_{uu}G(0,0)(\varphi_0, \varphi_0), \varphi_0^*) \neq 0 .$$

Seguirem ara l'anàlisi de la bifurcació en el cas que $\mu'(0)$ sigui 0. Seguim, doncs, derivant (5) :

(ara necessitem que $(\mu(\alpha), u(\alpha))$ sigui de classe C^3 i per tant G de classe C^4).

$$D_{u\mu\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))(\mu'(\alpha))^2\varphi(\alpha) + 2D_{uu\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\,(u'(\alpha),\varphi(\alpha))\mu'(\alpha) +$$

$$+ D_{u\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu''(\alpha)\varphi(\alpha) + 2\mu'(\alpha)D_{u\mu}G(\mu(\alpha),\varphi(\alpha))\varphi'(\alpha) +$$

$$+ D_{uuu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))(u'(\alpha),u'(\alpha),\varphi(\alpha)) + D_{uu}G(\mu(\alpha),\varphi(\alpha))\,(u''(\alpha),\varphi(\alpha)) +$$

$$+ 2D_{uu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\,(u'(\alpha),\varphi'(\alpha)) + D_uG(\mu(\alpha),\varphi(\alpha))\varphi''(\alpha) - \sigma''(\alpha)\varphi(\alpha) -$$

$$- 2\sigma'(\alpha)\varphi'(\alpha) - \sigma(\alpha)\varphi''(\alpha) = 0$$

Avaluem a $\alpha = 0$, suposant $\mu'(0) = 0$ (això implica $\sigma'(0) = 0$) i recordant $u'(0) = \varphi_0$, $\sigma(0) = 0$

$$\mu''(0)D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0 + D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0) + D_{uu}G(0,0)(u''(0),\varphi_0) +$$

$$+ 2D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0) + L_0\,\varphi''(0) - \sigma''(0)\varphi_0 = 0$$

Multiplicant escalarment per φ_0^* :

(31) $(\varphi_0,\varphi_0^*)\sigma''(0) = \mu''(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) + (D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0)\varphi_0^*)$

$$+ (D_{uu}G(0,0)(u''(0),\varphi_0),\varphi_0^*) + 2(D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0),\varphi_0^*)$$

D'altra banda, derivant a (7) :

$$D_{\mu\mu\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\ (\mu'(\alpha))^3 + 3D_{u\mu\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\ (\mu'(\alpha))^2u'(\alpha) +$$

$$+ 3D_{\mu\mu}G(\mu(\alpha),\ u(\alpha))\mu'(\alpha)\mu''(\alpha) + 3D_{uu\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu'(\alpha)(u'(\alpha),u'(\alpha))$$

$$+ 3D_{u\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu'(\alpha)u''(\alpha) + D_{\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu'''(\alpha) +$$

$$+ D_{uuu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))(u'(\alpha),u'(\alpha),u'(\alpha)) + 3D_{uu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))(u''(\alpha),u'(\alpha) +$$

$$+ D_{u}G(\mu(\alpha),u(\alpha))u'''(\alpha) + 3D_{u\mu}G(\mu(\alpha),u(\alpha))\mu''(\alpha)u'(\alpha) = 0$$

Avaluem aquesta expressió també a $\alpha = 0$, suposant $\mu'(0) = 0$ i recordant

$$u'(0) = \varphi_0,\ D_{\mu}G(0,0) = D_{\mu\mu}G(0,0) = D_{\mu\mu\mu}G(0,0) = 0$$

$$D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0) + 3D_{uu}G(0,0)(u''(0),\varphi_0) +$$

$$+ 3L_0\ u'''(0) + 3D_{u\mu}G(0,0)\mu''(0)\varphi_0 = 0$$

Multiplicant escalarment per φ_0^* :

(32)

$$0 = 3\mu''(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) + (D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0) + 3D_{uu}G(0,0)(u''(0),\varphi_0),\varphi_0^*)$$

Abans de seguir demostrem el següent lemma tècnic :

Lemma 4.1. En aquestes condicions:

$$(D_{uu}G(0,0)(u''(0),\varphi_0),\varphi_0^*) = (D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0),\varphi_0^*)$$

Demostració

Avaluant (25) a $\alpha = o$ i suposant $\mu'(0) = 0$, $\sigma'(0) = 0$ tindrem

$$D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0) + L_0\ \varphi'(0) = 0$$

perquè $u'(0) = \varphi_0$ i $\sigma(0) = 0$.

Igualment, avaluant (7) a $\alpha = 0$ i amb les mateixes suposicions :

$$D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0) + L_0\ u''(0) = 0$$

D'això es dedueix $u''(0) - \varphi'(0) \in \text{Nuc } L_0$. O sigui

$$u''(0) = \varphi'(0) + \nu\varphi_0 \qquad \text{on} \qquad \nu \in \mathbb{R}$$

Per tant,

$$(D_{uu}G(0,0)(u''(0),\varphi_0),\varphi_0^*) = (D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0) + \nu\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) =$$

$$= (D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0),\varphi_0^*) + \nu(D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*)$$

Però el segon sumand és zero perquè suposem $\mu'(0) = 0$

Aplicant aquest lemma tindrem que (31) es converteix en

(33)

$$(\varphi_0,\varphi_0^*)\sigma''(0) = \mu''(0)(D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*) + D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) +$$

$$+ 3(D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0),\varphi_0^*)\ .$$

i (32) en:

$$0 = 3\mu''(0)(D_{u\mu}G(0,0)\,\varphi_0,\varphi_0^*) + (D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) +$$

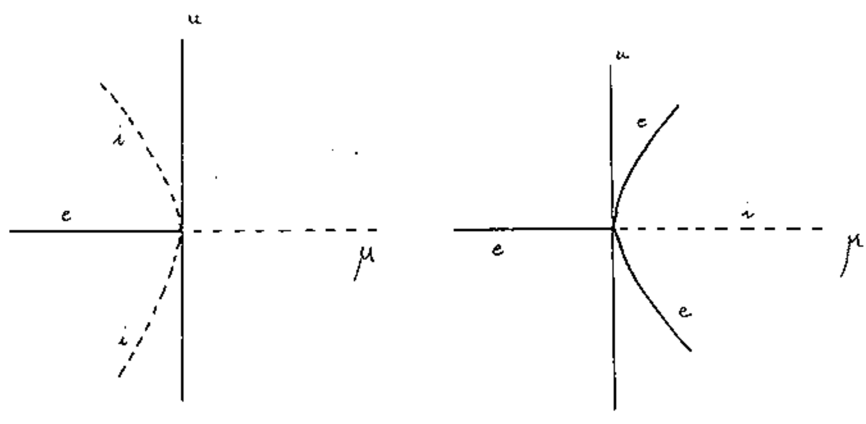
$$+ 3(D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0)\varphi_0^{\star})$$

Ara podem enunciar el següent teorema.

Teorema 4.3.

En les hipotesis del teorema 4.1. suposem $\mu'(0) = 0$ pero $\mu''(0) \neq 0$ Aleshores el diagrama de bifurcació és del tipus 2 ó 3, i per tant, de la solució $u \equiv 0$ es bifurquen dues solucions per $\mu > 0$ i cap per $\mu < 0$ o dues per $\mu < 0$ i cap per $\mu > 0$. Les solucions bifurcades són estables si són supercrítiques i inestables si són subcrítiques . Si $\mu''(0) < 0$ les branques bifurcades seran subcrítiques i, si $\mu''(0) > 0$, seran supercrítiques.

Resumint, tindrem els següents diagrames de bifurcació:



$\mu''(0) < 0$ $\mu''(0) > 0$

Demostració

El vector tangent a la corba $(\mu(\alpha),u(\alpha))$ és, en el nostre cas, $(0,\varphi_0)$, Això ens dóna tangent vertical en el diagrama. Com $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) \neq 0$ tenim que α és un extrem de la funció $\alpha \longrightarrow \mu(\alpha)$, de la qual cosa deduïm una de les dues figures. Amés, és clar que el signe de $\mu''(0)$ ens determinarà quina de les dues és.

Per a determinar l'estabilitat, utilitzem les expressions (33) i (34). D'elles es dedueix:

$$\sigma''(0) = -2\mu''(0) \frac{D_{u\mu}G(0,0)\varphi_0,\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)} = -2\mu''(0)\lambda'(0)$$

És a dir, $\sigma''(0)$ té signe oposat a $\mu''(0)$. Com $\sigma'(0) = 0$, tindrem que si $\sigma''(0) > 0$, 0 serà un mínim de $\sigma(\alpha)$ i si $\sigma''(0) < 0$, serà un maxim. Com a conseqüència, tindrem estabilitat si $\sigma''(0) < 0$ (és a dir, si $\mu''(0) > 0$) i inestabilitat si $\sigma''(0) > 0$ (si $\mu''(0) < 0$) . En definitiva, si la solu-lució bifurcada és supercrítica serà estable i si és subcrítica serà inestable.

Notem per últim que la condició $\mu''(0) \neq 0$, i, en realitat, el signe de $\mu''(0)$ es pot calcular mitjançant l'expressió (34) :

$$3\mu''(0)\,\lambda'(0) = -\frac{D_{uuu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)} - 3\frac{D_{uu}G(0,0)(\varphi'(0),\varphi_0),\varphi_0^*)}{(\varphi_0,\varphi_0^*)}$$

on $\lambda'(0) > 0$ per hipòtesi i $\varphi'(0)$ es pot determinar de l'equació

$$L_0\,\varphi'(0) = -D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0)$$

que té solució, segons l'alternativa de Fredholm, car estem suposant

$$D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) = 0$$

A més $\varphi'(0)$ ha de complir $(\varphi'(0),\varphi_0) = 0$, com es pot veure derivant la segona equació de (24) i avaluant a $\alpha = 0$.

REGULARITAT DE G

Demostrarem en aquesta secció que les condicions de derivabilitat per a G que demanàvem a la secció precedent, és a dir G de classe C^3 per a l'estabilitat,es compleixen en el cas d'equacions de la forma

(35)
$$G(\mu,u) = d(\mu)\Delta u + F(\mu,u) \qquad u \in (H^2(\Omega, \frac{0}{0\nu}))^m = D$$

$$\mu \in \mathbb{R} \ , \ d(\mu) \in \mathbb{R}^m \ , \ F(\mu,u) \in (L^2(\Omega))^m$$

$$F(\mu,u) = f(\mu,u(x)) \ ,$$

sempre que les aplicacions $d(\mu)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$ i $f(\mu,x)$, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$, compleixin també certes condicions de regularitat.

En particular, demostrarem que si $d \in C^k(\mathbb{R})$ i $f \in C^k(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, llavors $G \in C^k(\mathbb{R} \times H^2(\Omega,\frac{0}{0\nu}), L^2(\Omega))$, és a dir, provarem els resultats complets per a $m=1$. La generalització al cas $m>1$ és directa (vegi's el primer capítol).

Observem que, si tenim, per a cada $\mu \in \mathbb{R}$ una solució estacionària $u_\mu \in D$ de l'equació:

$$\frac{du}{dt} = G(\mu,u)$$

O sigui, $G(\mu,u_\mu) = 0$, i a més l'aplicació

$$\mu \in \mathbb{R} \longrightarrow u_\mu \in D$$

és de classe C^k, llavors, mitjançant el canvi linial $v = u-u_\mu$, obtenim una equació

$$\frac{dv}{dt} = G(\mu,v+u_\mu) + \bar{G}(\mu,v)$$

tal que $\bar{G}$ és de classe C^k si G ho era i $\bar{G}(\mu,0)=0\ \forall\mu$.

Per això ens podem restringir a estudiar aquest últim cas.

Demostrarem, doncs, els següents teoremes:

Teorema 4.4

Sigui $f \in C^0(\mathbb{R})$, Ω obert acotat de $\mathbb{R}^n (n \leq 3)$ amb frontera de classe C^2. Definim

$$F : H^2(\Omega,\tfrac{\partial}{\partial\nu}) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$u(x) \longrightarrow f(u(x))$$

Aleshores F és contínua.

Demostració

F està ben definida. Com que $H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu})$ està inclòs continuament en $C(\bar{\Omega})$, la convergència en norma de H^2 implica convergència uniforme.

Llavors

$$\int_\Omega |F(u)|^2 dx = \int_\Omega |f(u(x))|^2 dx \leq \mu(\Omega) \sup_{x\in\Omega} |f(u(x))| < \infty$$

A més :

$$\int_\Omega |F(u_n) - F(u)|^2 = \int_\Omega |f(u_n(x)) - f(u(x))|^2$$

i aquesta última integral tendeix a 0 si $|u_n - u| \xrightarrow[H^2(\Omega)]{} 0$ degut a la continuïtat uniforme de f dins dels compactes.

Teorema 4.5.

Sigui $f \in C^1(\mathbb{R})$. Amb les condicions del teorema anterior, F és de classe C^1 i

$$DF(u)v = f'(u(x)).v(x)$$

Demostració

a) $$DF(u) : H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial \nu}) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$v \longrightarrow f'(u(x)).v(x)$$

és clarament linial i acotada.

b) $$\lim_{v\to 0} \frac{|F(u+v) - F_{(u)} - DF(u)v|_{L^2(\Omega)}}{|v|_{H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu})}} = 0$$

En efecte, hem d'acotar convenientment:

$$I: = \int_\Omega |f(u(x) + v(x)) - f(u(x)) - f'(u(x))v(x)|^2$$

Com F és contínuament diferenciable:

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f'(\alpha)\beta + \int_0^1 (f'(\alpha + t\beta) - f'(\alpha))\beta dt \ , \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Per tant,

$$I = \int_\Omega \left|\int_0^1 (f'(u(x) + tv(x)) - f'(u(x)))v(x)dt\right|^2 dx \leq$$

$$\int_\Omega \sup_{t\in[0,1]} |f'(u(x) + tv(x)) - f'(u(x))|^2 |v(x)|^2 dx \leq$$

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\ t\in[0,1]}} |f'(u(x) + tv(x)) - f'(u(x))|^2 |v|^2_{L^2}$$

Però, com v tendeix a 0 a $H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu})$, de la continuitat uniforme sobre els compactes de f' deduïm

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\ t\in[0,1]}} |f'(u(x) + tv(x) - f'(u(x))|^2 \xrightarrow[\substack{v\to 0\\ H^2}]{} 0$$

c) $DF : H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu}) \longrightarrow L(H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu}),L^2(\Omega)) := B_1$

$$u \longrightarrow DF(u)$$

és una aplicació contínua.

En efecte :

$$|DF(u) - DF(\bar{u})|_{B_1} = \sup_{\substack{v \in H^2 \\ |v|=1}} |f'(u(x))v(x) - f'(\bar{u}(x))v(x)|_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \sup_{\substack{v \in H^2 \\ |v|=1}} \int_\Omega |f'(u(x))v(x) - f'(\bar{u}(x))v(x)|^2 \leq \sup_{x \in \Omega} |f'(u(x)) - f'(\bar{u}(x))|^2$$

que tendeix a 0 si $\bar{u}$ tendeix a u dins $H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu})$

<u>Teorema 4.6.</u>

Sigui $f \in C^k(\mathbb{R})$. Amb les condicions anteriors, F és de classe C^k i

$$D^kF(u)(v_1,v_2,\dots v_k) = f^{(k)}(u(x))v_1(x)v_2(x)\dots v_k(x)$$

<u>Demostració</u>

Farem per inducció aquesta demostració, a partir del teorema anterior, en el qual hem provat el resultat per a $k = 1$.

a) $D^kF(u) : \overbrace{H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu})x\dots xH^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu})}^{k} \longrightarrow L^2(\Omega)$

$$(v_1, \dots v_k) \longrightarrow f^{(k)}(u(x))\ v_z(x)\dots v_k(x)$$

és clarament k-linial i acotada.

b) Suposem cert el teorema per a $k = n-1$. LLavors

$$\lim_{v \to 0} \frac{\left| D^{k-1}F(u+v) - D^{k-1}F(u) - D^kF(u)v \right|_{L(\overbrace{H^2 x \ldots x H^2}^{k}, L^2)}}{\left| v \right|_{H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})}} = 0$$

La demostració d'aquest fet és igual a la de la part *b)* del teorema anterior i no la farem.

c)
$$D^kF : H^2(\Omega, \tfrac{\partial}{\partial \nu}) \longrightarrow L(\overbrace{H^2 x \ldots x H^2}^{k}, L^2) =: B_k$$

$$u \longrightarrow D^kF(u)$$

és una aplicació contínua.

La demostració és, també, igual a la de la part *c)* del teorema anterior.

Tornant a l'equació (35) hem demostrat que, en el cas $m = 1$, si f no depèn de μ, i és de classe C^k, també ho és F. Pero observem que els mateixos raonaments ens servirien per a demostrar, en general, que F és de la mateixa classe que f encara que aquesta depengui de μ (utilitzant el teorema que ens diu que si existeixen les derivades parcials d'ordre k i són contínues, la funció és de classe C^k).

Igualment es provaria que $d(\mu)$ és de classe C^k com a aplicació de $\mathbb{R}$ en $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})$ i que Δu és de classe C^∞ és trivial perquè Δ és linial.

En definitiva obtindriem els resultats que esperavem, és a dir, que si les aplicacions d i f, considerades a variable real són de classe C^k, en considerar-les com a aplicacions entre els espais funcionals $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})$ i $L^2(\Omega)$ conserven les mateixes propietats de derivabilitat.

Si $m > 1$ les mateixes demostracions d'aquesta secció, amb lleugeres modificacions, ens portaran als mateixos resultats.

Això ens permet utilitzar els teoremes de bifurcació sense dificulats en els casos pràctics del proper capítol.

Observem, per últim, que en el primer capítol, quan demostràvem resultats de regularitat per a F vam obtenir resultats més pobres. Això és degut al fet que allí exigiem a F que transformés funcions de $H^2(\Omega, \frac{\partial}{\partial \nu})$ en funcions de $H'(\Omega)$ i en aquest espai tenim una norma diferente de la de $L^2(\Omega)$.

Comentaris

Els mètodes utilitzats en aquest capítol són locals. A més, s'hauria de continuar l'anàlisi del cas $\mu''(0) = 0$ i arribar a demostrar que sempre, si la solució bifurcada és supercrítica, és estable.

Actualment es treballa en la direcció d'aplicar mètodes més globals (homotòpics) a l'estudi de les bifurcacions (vegi's CONLEY-SMOLLER).

Malgrat tot, els resultats que hem provat són suficients per als nostres propòsits si volem estudiar bifurcacions "genèriques". De fet, és clar que la condició

$$(D_{uu}G(0,0)(\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*) \neq 0$$

és genèrica si el problema (en particular el domini Ω) no presenta massa simetries . És per això que el diagrama més genèric serà el de tipus (1) .

Tornarem a parlar d'aquestes qüestions en el capítol següent .

CAPITOL III

UN EXEMPLE : LES DUNES

INTRODUCCIÓ

Estudiarem en aquest capítol les possibles bifurcacions dels punts de repós estacionàris homogènis d'un sistema de reacció i difusió específic. Val a dir, en primer lloc, que el sistema que presentem ha estat suggerit per un intent de donar un model matemàtic per a la formació de dunes que involucri únicament equacions de reacció i difusió.

No pretenem amb aquest model interpretar de forma realista i acurada el fenomen complex de l'aparició de dunes-ondulacions- en una extensió de terreny coberta de sorra.

En realitat, el nostre objectiu principal és donar un exemple d'utilització de les tècniques descrites en els capítols anteriors,que,indubtablemente, poden ser molt útils per a estudiar fenòmens de perdua d'uniformitat (de morfogènesi) anàlegs al de les dunes (agrumollament de certes amebes, polarització d'un òvul, formació de dominis territorials en problemes ecològics, etc.).

Al Sahara, la sorra es genera per l'aigua que erosiona les pedres a les rieres que segueix, en forma torrencial, quan plou. Per altra banda, l'aigua freàtica aflora a certes regions i això fa que la sorra, portada pel vent, s'hi adhereixi i formi els "ergs", aquestes grans extensions de sorra del desert saharià. Una vegada hi ha sorra, l'aigua puja, per capil·laritat a la superficie. Fem notar que la major part del Sahara no està coberta de sorra, sinó de pedres, i que la imatge popularitzada d'un desert cobert de sorra, ve precisament del fet que els poblats i oasis es troben on hi ha aigua, i per tant, no lluny de la sorra. A més, està establert que les dunes no es mouen massa:d'altra manera, aquest poblats i oasis serien de du rada ben migrada. Hi ha mapes i altres dades que mostren l'estabilitat de les dunes durant segles.

Fem notar que, per a poder donar un model de reacció difusió senzill, hem suposat que, a la regió de l'espai on tenim situada la sorra, els vents no tenen direccions privilegiades.

També hi ha dunes que es mouen:al Perú i a Múrcia són ben conegudes. Aquest comportament diferent pot ser degut a una molt més gran direccionalitat del vent, que produeix una bifurcació de Hopf, és a dir, d'una solució periòdica, degut a què els valors propis de part real propis de part real positiva no són reals, sinó complexos conjugats.

5. L'estudi Matemàtic

El model

Sigui Ω un obert connex amb frontera de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$. Ω correspondrà a la regió del desert on hi suposem l'extensió de sorra.

Denotarem per $u(x,t)$ l'altura de sorra (respecte a un nivell fixat arbitràriament) en el punt $x \in \Omega$ i en el temps t . Direm $v(x,t)$ a la densitat superficial d'aigua.

Fem la següent hipòtesi:les equacions que governen l'evolució del sistema (u,v) són les següents:

(36)
$$u_t = f(u,v) + d_1 \Delta u$$

$$v_t = a(h(u) - v) - bv + d_2 \Delta v$$

on u_t i v_t representen derivades respecte al temps, a,b,d_1,d_2 són números reals positius.

Justifiquem breument l'elecció del sistema :

f és una aplicació de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que controla la velocitat de variació de u deguda a la pèrdua o guany net de sorra per efectes del vent. Notem que $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$, és a dir, la presència d'aigua augmenta l'adherència. Suposarem també $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$. Observem que l'augment de la quantitat de sorra que queda dipositada al xocar amb la duna. La suposició $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ correspon a creure que el segon dels efectes és més important.

El terme $d \Delta u$ representa la difusió dels grans de sorra sobre la superfície de la duna, és a dir, el trasllat de materials rodolant per la falda, principalment a causa del seu pes.

El terme de reacció $a(h(u)-v) - bv$ de la segona equació, consta de dues parts.

D'una banda, la variació de v deguda al transport d'aigua des de la capa freàtica fins a la superficie per capil.laritat,la qual suposarem proporcional a la diferència entre la quantitat de saturació $h(u)$ i la quantitat en el moment donat v. Això ens dóna el terme $a(h(u) - v)$. És clar que $h' < 0$.

D'altra banda, el terme $-bv$ representa la pèrdua d'aigua per evaporació.

Per últim, $d_2 \Delta v$ ens dóna la difusió d'aigua a la duna.

<u>Els paràmetres</u>

Anomenarem paràmetres a certes variables (implícites) independents del procés dinàmic que ens ocupa. Exemples serien la temperatura T, la velocitat del vent w, el tamany de la sorra s (el qual suposem uniforme).

Amb aquests paràmetres podem escriure :

$$f(u,v) = f(u,v,w,s)$$

$$d_1 = d_1(s,w)$$

$$h(u) = h(u,s)$$

$$b = b(T,w)$$

$$d_2 = d_2(s)$$

No explicitarem aquesta dependència respecte als paràmetres per comoditat d'escriptura.

Condicions a la frontera

Considerarem condicions a la frontera de Neumann homogènies, és a dir, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0$. Això voldrà dir que el flux de u, v a través de $\partial\Omega$ és nul.

Amb aquestes condicions tenim plantejat un problema d'evolució com els considerats en el primer capítol Per tant sabem que, per a tota condició inicial

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = u_0 \\ v(x,0) = v_0 \end{array}\right. \quad (u_0,v_0) \in (H^2(\Omega,\tfrac{\partial}{\partial\nu}))^2 = D$$

l'equació (36) defineix un semisistema dinàmic F_t a $(H^2(\Omega,\frac{\partial}{\partial\nu}))^2$ tal que $F_t(u_0,v_0)$ és solució, en sentit dèbil, de (36) .

ESTATS ESTACIONARIS HOMOGENIS I BIFURCACIONS A SOLUCIONS ESTACIONÀRIES

Entenem per solució estacionària homogènia de (1) una distribució constant en l'espai i en el temps de u i v, és a dir, $u \equiv u_1$, $v \equiv v_1$, $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ tals que

$$f(u_1, v_1) = 0$$
$$a(h(u_1) - v_1) - bv_1 = 0$$

O sigui

$$(37) \qquad \begin{aligned} & f(u_1, \tfrac{a}{a+b}\, h(u_1)) = 0 \\ & v_1 = \tfrac{a}{a+b}\, h(u_1) \end{aligned}$$

Una solució estacionària i homogènia (u_1, v_1) serà asimptòticament estable si l'espectre de l'operador L definit per:

$$L(b, u_1, v_1) = \begin{pmatrix} d_1\, \Delta & 0 \\ 0 & d_2\, \Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_1, v_1) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_1, v_1) \\ ah'(u_1) & -(a+b) \end{pmatrix}$$

està contingut estrictament a l'esquerra de l'eix imaginari i a distància positiva d'aquest (vegi's el capítol II).

Ja vam demostrar que $\sigma(L)$ està constituït únicament per valors propis i, que $\lambda \in \mathbb{C}$ és valor propi de L si i només si existeix un valor propi μ de Δ tal que

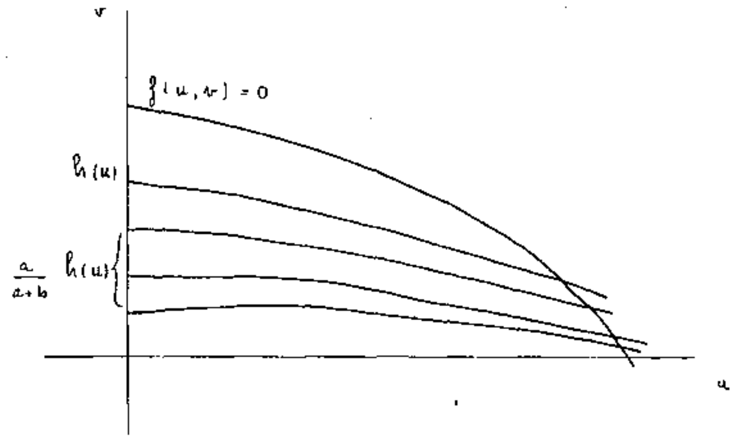
$$\det M(\mu) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u_1, v_1) + d_1 - \lambda & \frac{\partial f}{\partial v}(u_1, v_1) \\ a\, h'(u_1) & -(a+b) + \mu d_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

És a dir:

$$(38) \quad \det M(\mu) = \lambda^2 - (\frac{\partial f}{\partial u}(u_1, v_1) - (a+b) + (d_1 + d_2)\mu)\lambda + d_1 d_2 \mu^2 +$$
$$+ (d_2 \frac{\partial f}{\partial u}(u_1, v_1) - d_1(a+b))\mu - (a+b)\frac{\partial f}{\partial u}(u_1, v_1) - ah'(u_1)\frac{\partial f}{\partial v}(u_1, v_1) = 0$$

Suposarem fixos els paràmetres w i s i variable la temperatura ambient T. Aquesta variació modificarà, no solament el valor de b, sinó també els valors de u_1 i v_1 solucions de (37). Naturalment, es tindrà que la derivada de b respecte T serà positiva.

Suposem que, per a tota T en l'interval que ens interessa, tenim una solució $(u_1(b),v_1(b))$ de l'equació (2); de classe C^3 en b, com es veu a la següent figura, on hem suposat certes característiques per f i h.



Suposem que, per $T < T^*$, la solució estacionària homogènia corresponent $(u_1(b),v_1(b))$ és asimptòticament estable però que, per $T = T^*$, un valor propi $\lambda(T)$ (o, el que és el mateix, $\lambda(b)$) de L es fa 0 i $\lambda'(T)$ és positiva.

Sabem que, en aquestes condicions, es bifurca una nova solució estacionària de (9) que ja no serà, generalment, homogènia.

Bifurcació el variar b(T)

Per a simplificar l'estudi, suposarem constants en b les derivades:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_1(b),v_1(b)),\quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_1(b),v_1(b)),\quad h'(u_1(b)).$$

Aquesta aproximació és posible donada la regularitat de f i de h i el fet que, quan b varia de 0 a ∞, la solució $(u_1(b),v_1(b))$ recorre un petit tros de la corba $f(u,v)=0$. (Vegi's la figura anterior). No explicitarem, des d'ara, la dependència d'aquestes derivades que suposarem sempre avaluades a (u_1,v_1), solució de (37)

Exigim, d'ara endavant, les següents condicions:

$$\frac{\partial f}{\partial u} < a \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u} + h' \frac{\partial f}{\partial v} < 0$$

Encara que, en aquest context, aquestes condicions, així com dues més que apareixeran més tard, semblen força gratuites, és d'esperar que les circumstàncies físiques les justifiquin.

Les desigualtats:

$$d_1 > 0 \ , \quad d_2 > 0 \ , \quad \mu \leq 0 \ , \quad \frac{\partial f}{\partial u} < 0$$

impliquen $\quad \frac{\partial f}{\partial u} - (a+b) + (d_1+d_2)\mu < 0 \quad \forall \mu \in \sigma(\Delta)$

Per tant, el signe de l'expressió $q(\mu,b)$ definida:

$q(\mu,b) = d_1 d_2 \mu^2 + (d_2 \frac{\partial f}{\partial u} - d_1(a+b))\mu - (a+b)\frac{\partial f}{\partial u} - ah' \frac{\partial f}{\partial v}$ determinarà el signe de la part real de les solucions de (38). Concretament,

a) Si, per a qualsevol $\mu \in \sigma(\Delta)$, $q(\mu,b)$ és positiu, la part real de les arrels de (38) serà negativa i la solució $u \equiv u_1(b)$, $v \equiv v_1(b)$ de (36) serà asimptòticament estable

b) Si existeix un $\mu \in \sigma(\Delta)$ tal que $q(\mu,b)$ és negatiu, una de les arrels de (38) serà positiva i, per tant, la solució $u \quad u_1(b)$, $v \quad v_1(b)$ serà inestable.

c) Si existeix un $\mu \in \sigma(\Delta)$ tal que $q(\mu,b)=0$, una de les arrels de (38) serà o. Per tant, o serà valor propi de **L** i podrà aparèixer una bifurcació com les estudiades en el capítol anterior.

Dibuixem la gràfica de la funció $b=\varphi(\mu)$ definida per l'equació $q(\mu,b)=0$:

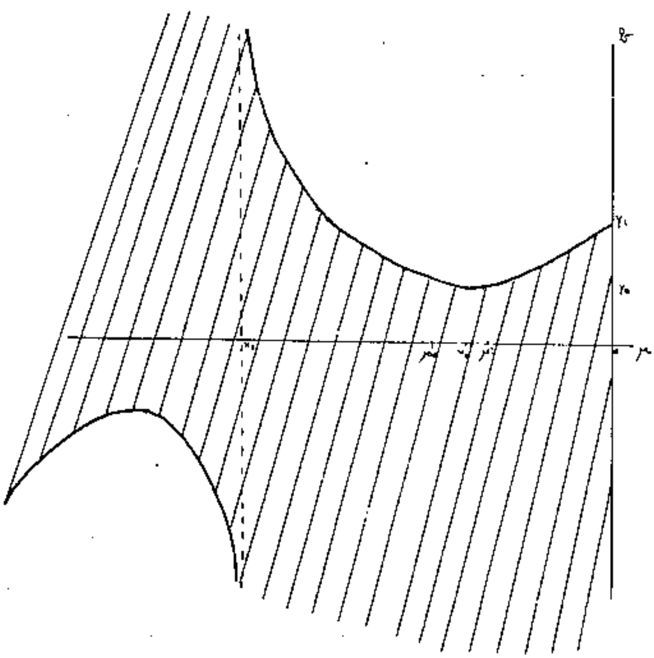
$$\varphi(\mu) = \frac{d_1 d_2 \mu^2 + (d_2 f_u - d_1 a)\mu - a\,(f_u + h' f_u)}{d_1 \mu + f_u}$$

suposant les següents condicions

$$(39) \qquad \left(d_2 \frac{\partial f}{\partial u} + d_1 a\right)^2 + 4 a d_1 d_2 \frac{\partial f}{\partial v} h' < 0$$

$$(40) \qquad d_2 \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + a\, d_1 h' \frac{\partial f}{\partial v} > 0$$

Notem que (39) ens diu que el discriminant del numerador de $\varphi(\mu)$ és negatiu, és a dir, que la gràfica no tallarà l'eix de les x. La condició (40) implica que el mínim relatiu de $\varphi(\mu)$ s'atany per a $\mu < 0$. Recordem que només ens interessen els μ negatiu o zero perquè $\sigma(\Delta) \subset (-\infty, 0]$.



$$x_0 = -\frac{1}{d_1}\frac{\partial f}{\partial u} + \sqrt{-\frac{a}{d_1 d_2}\, h' \frac{\partial f}{\partial v}} < 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{d_1}\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\gamma_0 = \varphi(x_0)$$

$$\gamma_1 = -a\left(1 + h' \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}}\right)$$

La zona ratllada correspon a les parelles (μ, b) tals que
$d_1 d_2 \mu^2 + (d_2 \frac{\partial f}{\partial u} - d_1(a+b))\mu - (a+b)\frac{\partial f}{\partial u} - ah' \frac{\partial f}{\partial v} > 0.$

Per tant, existeix un interval del paràmetre b, que conté l'interval $[0, y_0)$, per al qual la solució $(u_1(b), v_1(b))$ és estable.

Quan, per efecte d'un augment de T fins a T*, b augmenta fins a un cert

$$b^* = \min_{\mu \in \sigma(\Delta) \cap [0, X_1)} \{ b(\mu) \}$$

es produeix la desestabilització de $(u_1(b), v_1(b))$ perquè, per aquest valor de b existeix un valor propi de L que s'ha fet 0 mentre els altres es conserven a distància positiva de l'eix imaginari.

Aquest és un fenomen de quantització.

Denotarem per $\mu_0 \in \sigma(\Delta) \cap [0, x_1]$ el que faci

$$\varphi(\mu_0) = b^*$$

Fem notar ara que si no es complís la condició (39) podria passar que, per a cap valor de $b > 0$ es tingués estabilitat per a la solució (u_1, v_1). Si no es complís la condició (40), la funció $\varphi(\mu)$ seria decreixent, la qual comportaria que la desestabilització es produiria per a $\mu_0 = 0$ (recordem que 0 és valor propi de Δ). Però llavors la solució bifurcada seria també homogènia perquè la funció propia de Δ corresponent al valor propi 0 és una constant (vegi's el capitol II).

Notem un altre fet interessant: si el tamany de Ω creix, els valors propis de Δ, que es conserven a $(-\infty, 0]$, tendeixen a espesseir-se (com es comprova facilment si $n = 1$). Podem conjecturar

$$\lim_{u(\Omega) \to \infty} \mu_0 = x_0$$

$$\lim_{m(\Omega) \to \infty} b^* = y_0$$

on els valors (x_0,y_0) són independents de la forma de Ω (veure PERELLO).

Tornem a l'anàlisi de la situació crítica en que un dels valors propis de L s'ha fet o. De moment sabem que $(u_1(b),v_1(b))$ es torna inestable.

Anem a veure si ens trobem en les hipòtesis del capítol anterior i podem demostrar efectivament l'aparició d'una solució bifurcada atractora.

Tenim una aplicació $G\colon \mathbb{R}\times D \to H$ definida

$$G\begin{pmatrix} b \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) + d_1\Delta u \\ a(h(u)-v) - bv + d_2\Delta v \end{pmatrix}$$

G és de classe C^3 si f i h ho són.

La part linial de G és:

$$L(b,u,v) = D_{(u,v)}G\begin{pmatrix} b \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} + d_1\Delta & \frac{\partial f}{\partial v} \\ ah' & -(a+b)+d_2\Delta \end{pmatrix}$$

Hem vist ja que si $b<b^*$, l'espectre de L està tot a l'esquerra de l'eix imaginari i que si $b=b^*$, un valor propi de L es fa 0 mentre els altres continuen amb part real negativa.

Suposem que $\lambda(b)$ (el valor propi de L de part real més grossa) és simple. Perquè sigui així hem de suposar que $\sigma(\Delta)$ està format per valors propis simples (cosa que és genèrica si Ω no té simetries); també hem de suposar que existeix un únic $u_0 \in \sigma(\Delta)$ tal que

$$b(\mu_0) = \min_{\mu\in\sigma(\Delta)\cap\left[0,-\frac{1}{d_1}\frac{\partial f}{\partial u}\right)} \{b(\mu)\}$$

En aquesta situació tindrem també Rang $M(\mu_0)=1$ perquè

$$\frac{\partial f}{\partial u} - (a+b) + (d_1+d_2)\mu_0 < 0$$

Per tant dim Nuc $L(b^*, u_1(b^*),v_1(b^*)) = 1$.

Com que a més, segons el teorema 3.5, L és un operador del tipus Fredholm, direm que $0 = \lambda(b^*)$ és un valor propi simple de $L(b^*, u_1(b^*), v_1(b^*))$.

La funció pròpia corresponent serà $\varphi_o = (a_1\psi_o, a_2\psi_o)$ on ψ_o és la funció pròpia de Δ de valor propi μ_o i a_1, a_2 compleixen la relació

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} + d_1\mu_o\right)a_1 + \frac{\partial f}{\partial v}a_2 = 0$$

És a dir, (a_1, a_2) és vector propi de valor propi 0 de $M(\mu_o)$

Podem prendre $|\psi_o|_{L^2(\Omega)} = 1$, $|\varphi_o|_H = 1$.

Sabem que Rang $L(b^*, u_1(b^*), v_1(b^*)) = \langle\varphi_o^*\rangle^{\perp}$ amb

$\langle\varphi_o^*\rangle = \mathrm{Nuc}(L(b^*, u_1(b^*), v_1\, b^*)))^*$.

Calculem l'operador L^*, adjunt de L:

Com Δ és autoadjunt i d_1 i d_2 reals:

$$L^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} + d_1\Delta & ah' \\ \frac{\partial f}{\partial v} & -(a+b) + d_2\Delta \end{pmatrix}$$

Per tant, φ_o^* serà de la forma $(a_1^*\psi_o, a_2^*\psi_o)$ on (a_1, a_2) és vector propi de valor propi 0 de la matriu $M^*(\mu_o)$:

$$M^*(\mu_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} + d_1\mu_o & ah' \\ \frac{\partial f}{\partial v} & -(a+b) + d_2\mu_o \end{pmatrix}$$

Per tant: $\left(\frac{\partial f}{\partial u} + d_1\mu_o\right) a_1^* + ah'a_2^* = 0$

Comprovem ara $(\varphi_o, \varphi_o^*)_H \neq 0$.

$$(\varphi_o, \varphi_o^*) = a_2a_2^* \left(1 + \frac{ah'\frac{\partial f}{\partial v}}{\left(\frac{\partial f}{\partial u} + d_1\mu_o\right)^2}\right) \neq 0$$

En efecte: $a_2 \neq 0$, $a_2^* \neq 0$ i

$$(41) \qquad \frac{ah'\frac{\partial f}{\partial u}}{\left(-\frac{\partial f}{\partial u} + d_1\mu_0\right)^2} < \frac{ah'\frac{\partial f}{\partial v}}{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2} < \frac{h'\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}} < -1$$

on hem utilitzat : $0 < \frac{\partial f}{\partial u} < a$ i $\frac{\partial f}{\partial u} < -h'\frac{\partial f}{\partial v}$

Investiguem l'expressió:

$$\lambda'(b^*) = \frac{1}{(\varphi_0,\varphi_0^*)} \left(D_{(u,v)b}G(b^*,u_1,v_1)\ \varphi_0,\varphi_0^*\right)$$

És clar que:

$$D_{(u,v)b}G(b,u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\lambda'(b^*) = \frac{1}{(\varphi_0,\varphi_0^*)} \left((0,-a_2\psi_0),(a_1^*\psi_0,a_2^*\psi_0)\right)_H = \frac{-a_2a_2^*}{(\varphi_0,\varphi_0^*)}$$

Substituint el valor de (φ_0,φ_0^*) i utilitzant (6)

$$\lambda'(b^*) = -\left(1 + \frac{ah'\frac{\partial f}{\partial v}}{\left(\frac{\partial f}{\partial u} + d_1\mu_0\right)^2}\right) > 0$$

Recordant el capítol anterior, aquesta condició ens assegura l'aparició d'una corba de solucions que es bifurca de l'antiga solució.

L'última condició, que ens assegura la bifurcació d'una única solució estable per a $b > b^*$ és:

$$(42) \qquad \left(D^2_{(u,v)}G(b^*,u_1(b^*),v_1(b^*))\ (\varphi_0,\varphi_0),\varphi_0^*\right) \neq 0$$

En el nostre cas

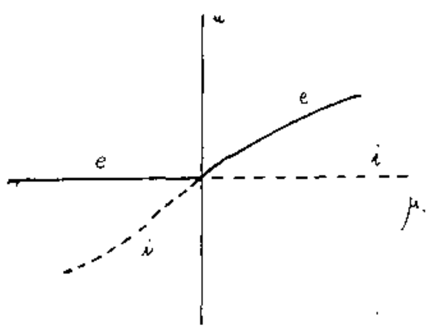
$$D^2_{(u,v)}G(b^*,u_1,v_1) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ah'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

D'on la condició (42) es converteix en:

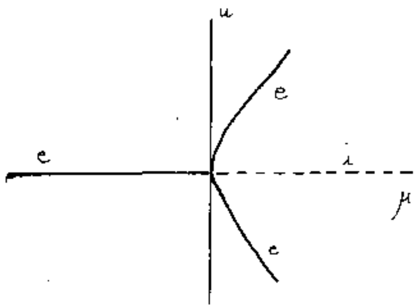
$$(43) \quad \left[(a_1 a_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot a_1^* + ah'' a_1^2 a_2^* \right] (\psi_0^2, \psi_0)_H \neq 0$$

Aquesta quantitat serà, genèricament, diferent de 0.

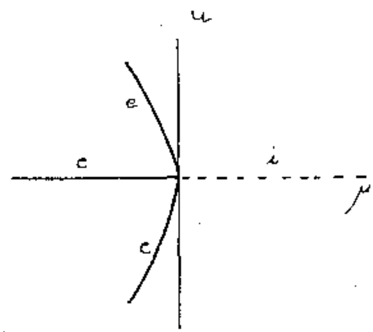
Per tant , el diagrama de bifurcació que obtindrem serà de la forma:



Observem, pero, que si Ω admet un eix de simetria i la funció propia de Δ, ψ_0, és senar respecte aquest eix, tindrem $\int_\Omega \psi_0^3 = 0$, i per tant, la condició (43) no es complirà. Llavors el diagrama serà, genèricament,(és a dir, si es compleix la condició $\mu''\neq 0$ d'una de les formes següents:



bifurcació supercrítica



bifurcació subcrítica.

BIBLIOGRAFIA

1. Berezanskii, J.M. "Expansions in eigenfunctions of Selfadjoint Operators" A.M.S. 1968.

2. Chandrasekkar,S. "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" (Clarendon Press, Oxford, 1961).

3. Conley, C. i Smoller, J. "Topological tecniques in Reaction-Diffusion Equations". Per aparéixer.

   Conley,C. i Smoller,J. "Remarks on the stability of steady-state solutions of reactions-diffusion equations". Per aparéixer.

4. Dieudonné "Foundations of Modern Analysis" . A.P. 1960.

5. Fisher, R.A. "The wave advance of advantageous genes" Ann. of Eugenics 7, 355-369 (1937).

6. Friedman, A. "Partial Differential Equations" Holt, Rinehart and Winston, 1969.

7. Gierer,A. Meinhardt,H. "Biological Pattern formation involving lateral inhibition" Lectures on Mathe. in the Life Sciences, Vol.7 A.M.S.1974.

8. Iooss,G. "Cours de troisieme cycle", 1972-73. No publicat.

9. Murray,J.D. "Lectures on nonlinear differential equations models in biology" Clarendon 1977.

10. Nicolis,G. Prigogine I. "Self-Organization in non-equilibrium systems". Wiley, 1977.

11. Perelló,C. "Un problema per als matemàtics:Com es perd la uniformitat d'un medi". Pub.Mat.U.A.B n°19, 1980.

12. Prigogine,I. "Evolution and Consciousness. Addison-Wesley, 1976.

13. Sattinger,D.H. "Group theoretic methods in bifurcation theory". Springer 1979.

14. Schwartz,J.T. "Nonlinear Functional Analysis". New York University, 1963-64.

15. Segel,L.A. "On collective motions of chemotactic cells". Lectures on Mathematics in the Life Sciences. Vol. 4. A.M.S. 1972.

16. Sobolevskii,P.E. "On equations of Parabolic type in Banach Space". Trudy Moscov. Mat. Obshch,10 (1961) 297-350.
Traducció anglesa. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 49. 1-62(1966).

17. Tanabe,H. "Equations of Evolutions" Pitman 1979.