Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE FUNCIONES CONVEXAS, CASI-CONVEXAS Y PSEUDO-CONVEXAS

J.P. Vilaplana, O. Herrero

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad del País Vasco

S U M M A R Y

In this paper, the basic properties of the convex functions are discussed, such as continuity, directional differentiability, and supportability properties. Also the relations with the quasi-convex, and pseudo-convex functions are given. Both weaker and stronger forms of convexity are also given.

Sea la función numérica $\underline{f}$: $\underline{C} \rightarrow \underline{E}_1 \cup \{\infty\}$ definida sobre el conjunto convexo $\underline{C}$.

DEFINICION 1.-

f <u>es convexa en</u> C <u>si</u>

$$\forall x,\ y \in C,\ \ \lambda \in (0,\ 1)\ :\ \ f[\lambda x+(1-\lambda)y] \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

f <u>es cóncava si</u> $-f$ <u>es convexa</u>.

Las funciones convexas y cóncavas pueden definirse también via el epígrafo y el hipógrafo de la función $\underline{f}$ dada.

DEFINICION 2.-

<u>El epígrafo de</u> f, E_f, <u>se define como</u>

$$E_f = \{(x,\ y) \in E_n \times E_1 :\ \ x \in C,\ \ y \in E_1,\ \ \ y \geq f(x)\}$$

DEFINICION 3.-

El hipografo de f, H_f, se define como

$$H_f = \{(x, y) \in E_n \times E_1 : \quad x \in C, \quad y \in E_1, \quad y \leq f(x)$$

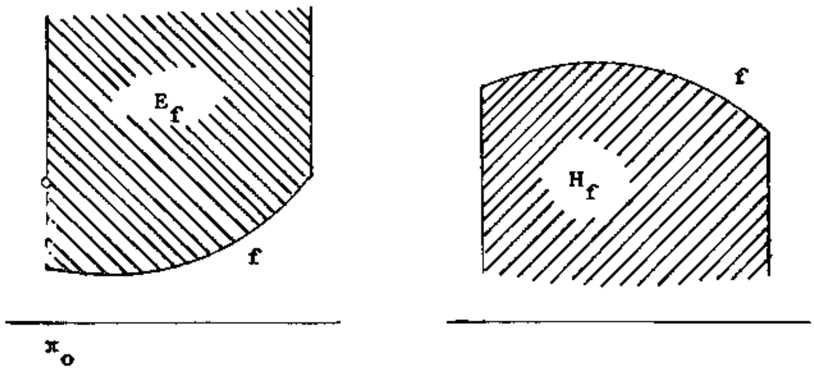

Figura 1.- Ejemplo de funciones convexas y cóncavas con indicación de su epigrafo e hipografo.

TEOREMA 1.-

$$f \text{ es } \left\{ \begin{matrix} \text{convexa} \\ \text{cóncava} \end{matrix} \right\} \text{ sobre } C \text{ si y solo si } \left\{ \begin{matrix} E_f \\ H_f \end{matrix} \right\} \text{ es convexo.}$$

DEFINICION 4.-

f es estrictamente convexa en C si:

$$x, y \in C, \quad \lambda \in (0, 1) \quad ; \quad f\left[\lambda x + (1-\lambda) y\right] < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Una función f es estrictamente cóncava, si $-f$ es estrictamente convexa.

DEFINICION 5.-

Sea $f: C \rightarrow E_1 \cup \{+\infty\}$ una función convexa definida sobre el conjunto convexo C, se dice que ξ es un subgradiente de f en $x_o \in C$ si

$$\forall x \in C \quad : \quad f(x) \geq f(x_o) + \xi f(x_o)(x - x_o)$$

TEOREMA 2.-

Toda función convexa f, definida sobre un conjunto convexo C, es convexa sobre C si y solo si

$$\forall x_o \in \text{int } C, \ \exists \xi \in E_n \quad : \quad f(x) \geq f(x_o) + \xi f(x_o)(x - x_o)$$

COROLARIO 1.-

Si f es una función convexa valorada real, definida sobre cada punto de E_n, f es convexa si y solo si posee un subgradiente para todo $x \in E_n$, es decir:

$$\forall x \in E_n, \ \forall y \in E_n, \ \exists \xi \in E_n \quad : \quad f(y) \geq f(x) + \xi f(x)(y - x)$$

DEFINICION 6.-

Sea f una función numérica definida en un conjunto A, se dice que f es continua en $x_o \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ d(x_o, x) < \delta \implies \left| f(x) - f(x_o) \right| < \varepsilon$$

f es continua en A, si f es continua para todo $x \in A$.

TEOREMA 3.-

Toda función numérica convexa f, definida en un conjunto convexo C, es continua en el interior de C.

TEOREMA 4.-

Sea $f: E_n \to E_1 \cup \{+\infty\}$ convexa y $x_o \in$ dom f. La derivada direccional unilateral $f'_+(x_o; x)$ existe para todo $x \in E_n$ distinto de cero.

LEMA 1.-

Si $f: C \to E_1$ es convexa, C un conjunto convexo abierto en E_n, y ξ un subgradiente de f en $x_o \in C$, se verifica $\xi = \nabla f(x_o)$ supuesto que existe éste último.

TEOREMA 5.-

Sea $f: C \to E_1$ diferenciable sobre el conjunto convexo abierto C. f es convexa sobre C si y solo si

$$\forall x \in C, \ \exists x_o \in C \quad : \quad \left[\nabla f(x) - \nabla f(x_o)\right](x - x_o) \geq 0$$

TEOREMA 6.-

Sea $f: C \Rightarrow E_1$ dos veces diferenciable sobre C, siendo C un conjunto convexo abierto. f es convexa sobre C si y solo si la matriz hessiana de f es semi-definida positiva en todo C, es decir

$$\forall x \in C \qquad y' \nabla^2 f(x)\, y \geq 0$$

Sea $f: C \Rightarrow E_1 \cup \{\infty\}$, siendo C un conjunto convexo en E_n.

DEFINICION 7.-

f es casi-convexa si para todo $x_1, x_2 \in C$ con $f(x_1) \leq f(x_2)$ se verifica:

$$\forall \lambda \in (0,1) \quad : \quad f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \leq f(x_2)$$

f es casi-cóncava si $-f$ es casi-convexa.

DEFINICION 8.-

f es estrictamente casi-convexa si para todo $x_1, x_2 \in C$ con $f(x_1) < f(x_2)$ se verifica:

$$\forall \lambda \in (0,1) \quad : \quad f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] < f(x_2)$$

f es estrictamente casi-cóncavo, si $-f$ es estrictamente casi--convexa.

TEOREMA 7.-

f es casi-convexa sobre C si y solo si $C_\alpha = \{x \in C: f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para todo número real α.

TEOREMA 8.-

Sea C un conjunto convexo no vacio de E_n y $f: C \Rightarrow E_1 \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferiormente y estrictamente casi-convexa sobre C. f es casi-convexa sobre C.

TEOREMA 9.-

Si C es un conjunto convexo no vacio de E_n, $f: C \Rightarrow E_1$ una función estrictamente casi-convexa y x_0 C un mínimo local de f sobre C, se verifica:

Estrictamente convexa

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

$$\nabla f(x_1)(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1)$$

$$\downarrow$$

Convexa

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

$$\nabla f(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$$

$$\downarrow$$

Estrictamente pseudo-convexa

$$f(x_1) < f(x_2) \Longleftarrow \nabla f(x_2)(x_1 - x_2) \geq 0$$

$$\downarrow$$

Pseudo-convexa

$$f(x_2) < f(x_1) \Longrightarrow \nabla f(x_1)(x_2 - x_1) < 0$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) \Longleftarrow \nabla f(x_1)(x_2 - x_1) \geq 0$$

$$\downarrow$$

Estrictamente casi-convexa

$$f(x_2) < f(x_1) \Longrightarrow f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] < f(x_1)$$

$$\downarrow$$

Casi-convexa

$$C_\alpha = \{ x \in C: \ f(x) \leq \alpha \} \text{ convexo, } \forall \alpha$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) \Longrightarrow f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] \leq f(x_1)$$

$$f(x_2) \leq f(x_1) \Longrightarrow \nabla f(x_1)(x_2 - x_1) \leq 0$$

$$f(x_2) > f(x_1) \Longleftarrow \nabla f(x_1)(x_2 - x_1) > 0$$

Figura 2.- Taxonomía de las funciones convexas, casi-convexas y pseudo-convexas.

$$\forall x \in C \qquad : \qquad f(x_o) \leq f(x)$$

Este teorema, que asegura que un mínimo local es también un mínimo global, muestra la importancia de la casi-convexidad en la programación no lineal.

TEOREMA 10.-

Sean C un conjunto convexo abierto y $f: C \Rightarrow E_1$ una función diferenciable sobre C. f es casi-convexa sobre C si y solo si para todo $x_1, x_2 \in C$, con $f(x_1) \leq f(x_2)$, se verifica:

$$\nabla f(x_2)\ (x_1 - x_2) \leq 0$$

Este teorema establece las condiciones necesaria y suficiente que caracteriza a las funciones convexas diferenciables vía el gradiente.

Sea C un conjunto abierto en E_n y $f: C \Rightarrow E_1$ diferenciable sobre C.

DEFINICION 9.-

f es pseudo-convexa sobre C si para todo $x_1, x_2 \in C$ con $\nabla f(x_2)\ (x_1 - x_2) \geq 0$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$.

f es pseudo-cóncava si $-f$ es pseudo-convexa.

DEFINICION 10.-

f es estrictamente pseudo-convexa sobre C si para todo $x_1, x_2 \in C$, con $x_1 \neq x_2$ y $\nabla f(x_2)(x_1 - x_2) \leq 0$, se verifica $f(x_1) < f(x_2)$.

TEOREMA 11.-

Sea C un conjunto convexo abierto en E_n y $f: C \Rightarrow E_1$ una función pseudo-convexa diferenciable sobre C. f es estrictamente casi-convexa y también casi-convexa sobre C.

El recíproco de este teorema no es cierto siempre, como se comprueba al considerar la función $f(x) = x^3$.

Las relaciones entre todas las funciones aquí definidas aparecen en la Fig. 2.

B I B L I O G R A F I A

1.- BAZARAA, M.S. & SHETTY, C.M.- Foundations of Optimization. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

2.- BERMAN, A.- Cones, Matrices and Mathematical Programming. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

3.- MANGASARIAN, O.- Nonlinear Programming. McGraw-Hill Book. New York, 1969.