N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE COMO CARACTERIZAR LA EFICIENCIA DE LAS DESCOMPOSICIONES AUTOMATAS.

Teófilo Valdés, Carmen Arias

Universidad Complutense de Madrid
Universidad a Distancia

A partir de 1955, con los trabajos pioneros (H4) y (M1), se ha desarrollado una teoría, encuadrada dentro de la Teoría General de Sistemas, que ha sido posterior y universalmente conocida con el nombre de Teoría de Autómatas o Teoría de Máquinas Secuenciales Abstractas.

Se define un autómata, (K1), como el sistema $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\Gamma,\partial,\lambda)$

donde Q = conjunto finito de estados internos.

Σ = conjunto finito de inputs, Γ = conjunto finito de outputs.

$\partial: Q\times\Sigma \longrightarrow Q$ función parcial de salto entre estados.

$\lambda: Q\times\Sigma \longrightarrow \Gamma$ función parcial de outputs.

Si denotamos por Σ^* el semigrupo libre generado por Σ y por $\Sigma^+=\Sigma^*-\{e\}$, siendo e el elemento neutro de Σ^*, es claro que podemos -- ampliar los dominios de ∂ y λ respectivamente a $Q\times\Sigma^*$ y a $Q\times\Sigma^+$ mediante las fórmulas recursivas : $\forall x\in\Sigma^*\quad \forall\sigma\in\Sigma$

$$(q,e)\partial = q\;,\; (q,x\sigma)\partial=((q,x)\partial,\sigma)\quad;\quad (q,x\sigma)\lambda=((q,x)\partial,\sigma)\lambda$$

Un problema clásico sobre autómatas es aquel referido a la simulación o realización, (H3), de un autómata por otro. Intuitivamente la noción de simulación es clara: decimos que un autómata $\mathcal{A}_2$ simula a otro $\mathcal{A}_1$ cuando $\mathcal{A}_2$ puede comportarse, mediante una transformación adecuada, tal como lo hace $\mathcal{A}_1$. Formalmente, si $\mathcal{A}_i=(Q^i,\Sigma^i,\Gamma^i,\partial^i,\lambda^i)$, (i=1, 2), deben existir

$$\phi : Q^1 \longrightarrow Q^2 \quad \text{aplicación}$$
$$\psi : \Sigma^1 \longrightarrow \Sigma^2 \quad \text{aplicación}$$
$$\rho : \Gamma^1 \longrightarrow \Gamma^2 \quad \text{aplicación inyectiva}$$

tales que hagan cierto el diagrama.

$$\begin{tikzcd} Q^1 \times \Sigma^1 \arrow[r, "\phi \times \psi"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & Q^2 \times \Sigma^2 \arrow[d, "\lambda^2"] \\ \Gamma^1 \arrow[r, "\rho"] & \Gamma^2 \end{tikzcd}$$

es decir, $\lambda^1 \rho \subseteq (\phi \times \psi)\lambda^2$

El problema que tratamos de abordar es el de descomponer por simulación un autómata dado. Consideraremos exclusivamente aquellos autómatas reducidos (no existen estados o inputs que se comporten de igual forma desde el punto de vista de output). Esto no es ninguna restricción, (E1), ya que todo autómata puede ser simulado por otro en forma reducida.

El problema así planteado puede ser simplificado mediante la definición de semiautómatas. Definimos un semiautómata como $\mathcal{A}^a = (Q, \Sigma, \partial)$ con los mismos significados que los especificados para los autómatas. De esta forma, todo autómata define implicitamente un semiautómata asociado sin más que despreciar los outputs.

Dados dos semiautómatas $\mathcal{A}_i^a = (Q^i \Sigma^i \partial^i)$, (i=1,2), decimos que $\mathcal{A}_2^a$ simula a $\mathcal{A}_1^a$ si existen

$\xi : Q^2 \longrightarrow Q^1$ función parcial suprayectiva, $\psi : \Sigma^1 \longrightarrow \Sigma^2$ aplicación,

tales que $\forall \sigma \in \Sigma^1$ se verifique :

$$\begin{tikzcd} Q^2 \arrow[r, "\partial^2_{\sigma\psi}"] \arrow[d, "\xi"'] & Q^2 \arrow[d, "\xi"] \\ Q^1 \arrow[r, "\partial^1_\sigma"] & Q^1 \end{tikzcd} \qquad \xi \cdot \partial^1_\sigma \subseteq \partial^2_{\sigma\psi} \xi$$

$$(\partial^i_\sigma : Q^i \longrightarrow Q^i \text{ con } q\,\partial^i_\sigma = (q, \sigma)\partial^i)$$

La simplificación nos la ofrece el siguiente teorema:

TEOREMA 1 (Ginsburg, (G2))

Si $\mathcal{A}_1$ está en forma reducida:

$\exists \mathcal{A}_2$ tal que $\mathcal{A}_2$ simula $\mathcal{A}_1 \Longleftrightarrow \exists \mathcal{A}_2^a$ tal que $\mathcal{A}_2^a$ simula $\mathcal{A}_1^a$

Mediante esta simplificación basta considerar semiautómatas.

Aunque tradicionalmente se han desarrollado composiciones de autómatas en serie y en paralelo, nosotros usaremos un producto más general, llamado en cascada, (Z1).

DEFINICION 1

Dados $\mathcal{A}_A^* = (Q^A, \Sigma^A, \partial^A)$ y $\mathcal{A}_B^* = (Q^B, \Sigma^B, \partial^B)$, $\tilde{\Sigma}$ conjunto finito y dos aplicaciones

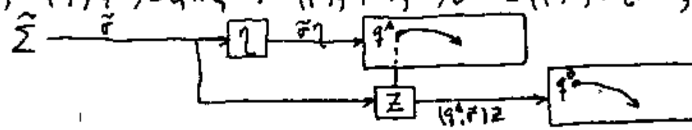
$$\eta: \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma^A \qquad y \qquad Z: Q^A \times \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma^B$$

definimos el producto en cascada de $\mathcal{A}_A^*$ por $\mathcal{A}_B^*$ como

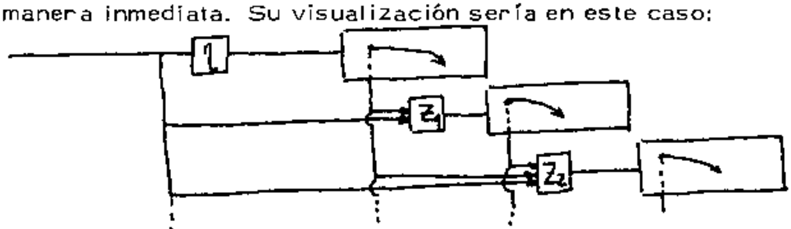
$$\mathcal{A}_A^* \times_Z^\eta \mathcal{A}_B^* = (Q^{A \times_Z^\eta B}, \tilde{\Sigma}, \partial^{\times_Z^\eta})$$

con $Q^{A \times_Z^\eta B} = Q^A \times Q^B$ (producto cartesiano)

$$\forall \tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}, \forall (q^A, q^B) \in Q^A \times Q^B : ((q^A, q^B), \tilde{\sigma})\partial^{\times_Z^\eta} = ((q^A, \tilde{\sigma}\eta)\partial^A, (q^B, (q^A, \tilde{\sigma})Z)\partial^B)$$



El producto en cascada puede ser facilmente generalizado a k factores de manera inmediata. Su visualización sería en este caso:



Nuestro objetivo primordial consistirá en buscar componentes típicos que puedan ser utilizados para simular cualesquiera semiautómatas. - Es obvio exigir a susodichos componentes, en caso de encontrarlos, que sean en cierto modo más simples que el semiautómata del cual partamos. - Dos son los criterios que proponemos para evaluar la mayor o menor complejidad de semiautómatas:

1º) Basándonos en el semigrupo de transformaciones definido por un semiautómata $\mathcal{A}^*$: $S = \{\partial_x : Q \longrightarrow Q \mid x \in \Sigma^*\}$

siendo $q\partial_x = (q, x)\partial$

Hagamos notar que, de igual forma, dado un semigrupo finito $(S, .)$ podemos definir un semiautómata, de semigrupo S, de la forma:

$$\mathcal{A}_S^* = (S, S, \partial^S) = (S, S, \cdot)$$

es decir: $\quad s_1 \partial^S_{s_2} = s_1 \cdot s_2$

2º) Basándonos en el número de estados.

Según esto, podemos dar las siguientes definiciones:

DEFINICION 2

Dados $\mathcal{A}_i^* = (Q^i, \Sigma^i, \partial^i)$, (i=1,2), se dice que $\mathcal{A}_1^*$ es más 1-simple que $\mathcal{A}_2^*$ si S_1 divide a S_2 como semigrupos (siendo S_i el semigrupo asociado a $\mathcal{A}_i^*$).

DEFINICION 3

Dados $\mathcal{A}_i = (Q^i, \Sigma^i, \partial^i)$, (i= 1,2), se dice que $\mathcal{A}_1^*$ es más 2-simple que $\mathcal{A}_2^*$ si $|Q^1| < |Q^2|$ (siendo $|Q^i|$ el cardinal de Q^i).

DEFINICION 4

Decimos que un semiautómata $\mathcal{A}^*$ se puede descomponer en r semiautómatas en forma k-eficiente (k=1,2), si existen $\mathcal{A}_i^*$ (i=1,...,r) tales que un cierto producto en cascada $\mathcal{A}_1^* X_{2_1} \mathcal{A}_2^* X_{2_2} \cdots X_{2_{r-1}} \mathcal{A}_r^*$ es capaz de simular a $\mathcal{A}^*$, siendo cada $\mathcal{A}_i^*$ más k-simple que $\mathcal{A}^*$

Si $\mathcal{A}^*$ no admite descomposición k-eficiente se dice que es k-irreducible (k=1,2).

Usando la descomposición prima de semigrupos (ver por ejemplo (L1), (L2) o (E2)), y la analogía existente entre la descomposición de autómatas y semigrupos (ver por ejemplo (k1)), podemos establecer que dado un $\mathcal{A}^*$ cualquiera con semigrupo S se verifica que

$$\mathcal{A}^* \in \overline{\mathcal{S}}(\text{UNIDADES} \cup \text{SIMPLES}(S))$$

(donde, si $\mathcal{F}$ es una familia de semigrupos, denotamos por $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ la clase de semiautómatas cerrada bajo simulaciones 1-eficientes de productos en cascada de semiautómatas con semigrupos de $\mathcal{F}$), y siendo

UNIDADES = $\{U_3, U_2, U_1, U_0\}$ = {Divisores de U_3}

estando U_3 definido mediante: $U_3 = \{1, r_1, r_2\}$

$\cdot$	1	r_1	r_2
1	1	r_1	r_2
r_1	r_1	r_1	r_2
r_2	r_2	r_1	r_2

SIMPLES $(S) = \{ G_i \mid G_i$ es un grupo simple que divide a $S \}$

Según esto, dado $\mathcal{A}^*$, la existencia de descomposición 1-eficiente depende solamente de UNIDADES, y podemos dar por ejemplo el siguiente

TEOREMA 2

Si en $\mathcal{A}^*$ existen dos o más inputs $\sigma \in \Sigma$ tales que ∂_σ sea una aplicación constante entonces $\mathcal{A}^*$ admite descomposición 1-eficiente.

Otros muchos resultados han sido obtenidos (para más datos consultar con autores).

Respecto al segundo criterio se han obtenido los siguientes resultados:

Sea $\mathcal{A}^* = (Q \Sigma \partial)$ un semiautómata con semigrupo S, y sea G el subgrupo de S definido por

$$G = \{ \partial_x \mid \partial_x \text{ es una permutación de } Q \} = \{ g \mid g \in G \}$$

Sea $E(q_0) = \{ g \in G \mid q_0 g = q_0 \}$, el subgrupo de G estabilizador de un cierto estado $q_0 \in Q$ cualquiera. En estas condiciones:

TEOREMA 3

Si G es transitivo en Q entonces $\mathcal{A}^*$ es descomponible 2-eficientemente.

TEOREMA 4

Si G no es transitivo en Q entonces unicamente es 2-eficientemente descomponible si y solo si existen

$$H_0 = G,\ H_1,\ H_2,\ \ldots\ldots,\ H_r$$

tales que

a) Cada H_i es subgrupo de H_{i-1} $(i = 1, \ldots, r)$

b) H_r es subgrupo de $E(q_0)$

c) $\dfrac{|H_{i-1}|}{|H_i|} < \dfrac{|G|}{|E(q_0)|}$ $(i=1, \ldots\ldots, r)$

Bibliografía.

(A1) ARBIB, M. A. (editor). Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups. Academic Press, New York, 1968.

(E1) EILEMBERG, S. Automata, Languages and Machines (Vol A). Academic Press, New York, 1974.

(E2) EILEMBERG, S. Automata, Languages and Machines (Vol B). Academic Press, New York, 1976.

(G1) GESEC, F. On Products of Abstract Automata. Acta Sci. Math., Vol 38, 21-43, 1976.

(G2) GINSBURG, A. Algebraic Theory of Automata. Academic Press, New York, 1968.

(H1) HALL, M. The Theory of Groups. Macmillan, New York, 1959.

(H2) HARTMANIS, J.; STEARNS, R. E. The Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. Prentice Hall, London, 1966.

(H3) HERMAN, G. T. When is a Sequential Machine the Realization of Another? Mathematical Systems Theory, Vol 5, Num 2, 115-127, 1971.

(H4) HUFFMAN, D. A. The synthesis of Sequential Switching Circuits. J. Franklin Institute, Vol 257, 161-190, 1954.

(K1) KALMAN, R. E.; FALB, P. L.; ARBIB, M. A. Topics in Mathematical System Theory. McGraw Hill, New York, 1969.

(L1) LALLEMENT, G. On prime Decomposition Theorem for Finite Monoids. Mathematical Systems Theory, Vol 5, Num 1, 8-12, 1971.

(L2) LALLEMENT, G. Semigroups and Combinatorial Applications. John Wiley, 1979.

(M1) MEALY, G. H. Method for Synthesizing Sequential Circuits. Bell Systems Tech. Journal, Vol 34, 1045-1079, 1955.

(Z1) ZEIGER, H. P. Cascade Synthesis of Finite-State Machines. Information and Control, Vol 10, 419-433, 1967.