Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

POLINÓMIOS GENERALIZADOS. SPLINES GENERALIZADOS. ALGUNOS ALGORITMOS CONVENIENTES

F. Aleixo Oliveira

Centro de Matemática
Universidade de Coimbra

Abstract - We consider spline functions of generalized polynomials, $S_{pg}(x)$, which are an extension of spline polynomials functions. We proove the existence and the unicity of an interpolate $S_{pg}(x)$ of order two, for a real-valued function f, known at n given real points. An extension of the Lagrange interpolate is given on the linear space of the $S_{pg}(x)$ functions of order two.
Finally we present an approximation of histograms by $S_{pg}(x)$ function of order three.

1 - A generalização do conceito de polinómios levou a considerar combinações lineares de dadas funções $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$. Suporemos que estas funções formam um sistema de Chebyshev em $[a,b] \subset \mathbb{R}$. As combinações lineares $\sum_{i=1}^n c_i\, g_i(x)$ serão designadas por polinómios generalizados.

Poderemos considerar diferentes tipos de aproximações por meio destes polinómios generalizados — aproximação de Chebyshev, aproximação em $\mathcal{L}_p[a,b]$, etc. Existem resultados muito importantes sobre o assunto. Ver [2]. Recentemente, G.Muhlbach, ver [3] e [4] e F.Oliveira [5] apresentaram resultados sobre interpolação por polinómios generalizados. Muhlbach generaliza os resultados conhecidos para polinómios ordinários apresentando o algoritmo de Neville-Aitken e o de Newton-das-Diferenças-Divididas para polinómios generalizados. F.Oliveira desenvolve um interpolador não linear obtido a partir da funções $\{g_i(x)\}_{i=1}^n$ dadas.

Estes resultados sobre polinómios generalizados sugerem naturalmente novas generalizações.

2 - Lembremos que podemos definir função spline polinomial de grau $m(m=0,1,2,\ldots)$ e continuidade k ($k \geq 0$, inteiro) como a função $S_m(x) \in C^k[a,b]$ que se reduz a um polinômio de grau m (ou inferior) em cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ da partição Δ de $[a,b]$.

Um tipo semelhante de funções spline utilizando polinômios generalizados, pode ser definido:

Splines de Polinômios Generalizados - diremos que $s(x)$ é um spline de polinômios generalizados de ordem n em $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e nodos $\{x_i\}_{i=1}^N \in [a,b]$ se

a) $s(x)$ é da forma $\sum_{i=1}^{n} c_i\, g_i(x)$ em cada intervalo $[x_{i-1},x_i]$ da partição Δ de $[a,b]$;

b) $s(x) \in C^k[a,b]$ com $k \geq 0$.

Designaremos por $S_{pg}(m,k)$ o conjunto dos splines de polinômios generalizados de ordem m e continuidade k em $[a,b]$.

Teorema 1 - Dada uma função $f: A \to B$, com $A,B \subset \mathbb{R}$, existe um único elemento $s(x) \in S_{pg}(2,k)$ que aproxima f em cada intervalo $[T_i,T_{i+1}]$ de $A = [a,b]$ e que é interpolador para f nos pontos $\{T_i\}_{i=1}^n$ de partição

$$\Delta : a = T_1 < T_2 < \ldots < T_n = b .$$

Para $x \in [T_1,T_2]$ teremos $s(x) \in S_{pg}(2,k)$ dado por

$$s(x) = c_{11}\, g_1(x) + c_{12}\, g_2(x)$$

$$= f(T_1)\,\frac{D[x,T_2]}{D[T_1,T_2]} + f(T_2)\,\frac{D[T_1,x]}{D[T_1,T_2]}$$

$$\text{com} \quad D[T_1,T_2] = \begin{vmatrix} g_1(T_1) & g_1(T_2) \\ g_2(T_1) & g_2(T_2) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

De modo análogo $s(x) = c_{i1}\, g_1(x) + c_{i2}\, g_2(x)$ para $x \in [T_i, T_{i+1}]$, $i = 1,\dots,n-1$. É evidente que $s(T_i) \equiv f(T_i)$, $i = 1,\dots,n$ e em cada $[T_i, T_{i+1}]$ é interpolador único. Ver [2], pg.78.

Se $\{g_i(x)\}_{i=1}^{2} \in C^k[a,b]$ teremos $s(x) \in C^k[a,b]$.

O erro da aproximação $s(x)$ para f pode exprimir-se por

$$E(x) = f(x) - s(x) = [f''(\xi) - s''(\xi)]\,(x-T_i)(x-T_{i+1})$$

para $x \in [T_i, T_{i+1}]$ com $\xi \in]T_i, T_{i+1}[$, $i = 1,\dots,n-1$.

3 - Designando por A o espaço linear de todas as funções spline de polinómios generalizados de ordem 2 e contínuas em $[T_1, T_n]$, com possíveis descontinuidades para as derivadas nos pontos $T_2,\dots,T_{n-1}$, construiremos uma base para A:

Seja $T_o := T_1$, $T_{n+1} := T_n$. Tomemos

$$H_i(x) = \begin{cases} \dfrac{D[T_{i-1}, x]}{D[T_{i-1}, T_i]} , & T_{i-1} \le x \le T_i \\[2ex] \dfrac{D[x, T_{i+1}]}{D[T_i, T_{i+1}]} , & T_i \le x \le T_{i+1} \\ & i = 1,\dots,n \end{cases}$$

a) $H_i(T_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

b) $H_i(x) \in A$, $i = 1,\dots,n$

c) $\sum_{i=1}^{n} r(T_i)\, H_i(x) \in A$ e coincide com $r(x)$ nos pontos $T_1,\dots,T_n$.

Teorema 3 - Se f é um elemento de A então o seu interpolador $s(x) \in S_{pg}(2,k)$ coincide com f, $s(x) \equiv f(x) \in A$.
Então de c) vem que $f(x) \in A$ se pode exprimir na forma

$$\text{d)} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(T_i)\, H_i(x)$$

Chamaremos a c) interpoladora de Lagrange em A, para uma função $r(x)$ conhecida nos $\{T_i\}_{i-1}^{n}$ pontos.

4 - Aproximação de histogramas por splines de polinômios generalizados de ordem três.

Supomos dados

1 - Um conjunto de $\{g_i(x)\}_{i=1}^{3}$ funções formando um sistema de Chebyshev em $[a,b]$.

2 - Uma sucessão estritamente crescente de pontos

$$\{T_i\}_{i=1}^{n+1} \in [a,b]$$

3 - O histograma de uma função f.

Pretende-se aproximar f, a partir do histograma dado, por meio de um spline de polinômios generalizados de ordem 3, que designaremos por $s(x) \in S_{pg}(3,k)$.

A partição Δ de $[a,b]$, obtida pelos pontos $\{T_i\}_1^{n+1}$, origina n intervalos em $[a,b]$.

Para conhecermos $s(x)$ em $[T_1, T_{n+1}]$ necessitamos de determinar $3n$ incógnitas c_{ij}, $i=1,\ldots,n$, $j=1,2,3$.

Iremos obter essas incógnitas pela resolução de um sistema de $3n$ equações lineares conjuntas.

Essas equações obtêm-se impondo condições de interpolação e de homogeneidade, naturalmente sugeridas pelo histograma dado.

a) Condições de interpolação

1 - $s(T_1) = s(T_{n+1}) = 0$

2 - $\int_{T_i}^{T_{i+1}} s(x)\, dx = h_i \, \Delta T_i$, com $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$

b) Condições de homogeneidade nos nodos interiores

T_i , $i=2,\ldots,n$:

1 - $s(T_i) + \Delta T_i \, s'(T_i) + \dfrac{(\Delta T_i)^2}{2} \, s''(T_i) = s(T_{i+1})$

2 - $s'(T_i) + \Delta T_i \, s''(T_i) = s'(T_{i+1})$

$i=2,\ldots,n$.

Temos no total $n+2$ condições de interpolação e $2(n-1)$ condições de homogeneidade que nos permitem obter $s(x)$ pela resolução do sistema formado por essas equações.

Bibliografia

1 - Boor, C. de, [1978] — A Pratical Guide to Splines, Springer Verlag.

2 - Cheney, E.M. [1966] — Introduction to Approximation Theory, Mc Graw-Hill.

3 - Muhlbach, G., [1978] — The General Neville-Aitken Algoritm and Some Appl., Num. Math. 31, 97-110.

4 - " " [1979] — The General Recurrence Relation for Divided--Diff. and the General Newton-Interp. - Algorithm with Appl. to Trig. Interp., Num. Math. 32, 393-408.

5 - Oliveira, F.A., [1979] - Quasilinear Interpolation by Generalized Polynomials, to appear.

6 - Varga, R. - [1971] — Functional Analysis and Approx. Theory in Numerical Analysis-Regional Conference Series in Applied Math.