Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

REDUCCION DE PROGRAMAS SEMIINFINITOS A PROGRAMAS FINITOS

M.A. Goberna, M.A. López Cerdá, J. Pastor

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Valencia

ABSTRAC.-

Given a semi-infinite Programming Problem, if we can find a finite representation of the feasible set, the problem is reduced to a finite one, with all the subsequent comptutational advantages. We study more in detail the linear case, giving methods which allow us to obtain a finite linear representation, when it is possible.

INTRODUCCION

Dado el problema de Programación Matemática:

$$\text{Min } \Psi(x), \quad x \in S \subset R^n$$

cuando S viene definido a través de infinitas restricciones,

$$S = \{x \in C / f_t(x) \leq 0,\ t \in T\}, \quad T \text{ infinito},$$

recibe el nombre de Problema de Programación Semiinfinita (PSI), frente al problema típico de Programación Finita (lineal o no lineal) que corresponde a T finito.

El conjunto C, sobre el que están definidas todas las restricciones, se llama conjunto soporte. Para el caso de restricciones lineales, se tomará $C = R^n$, representándose $f_t(x) \equiv a_t' x - \beta_t$.

En lo que sigue excluiremos el caso trivial $S = \phi$.

RELACIONES CONSECUENTES DE UN SISTEMA LINEAL

Una relación lineal $a'x \leq \beta$ es consecuente del sistema $\{a_t'x \leq \beta_t,\ t \in T$, cuando toda solución de este último satisface aquella desigualdad.

La caracterización de las relaciones consecuentes permite la eliminación de restricciones redundantes. En el caso finito, tal caracterización constituye el conocido Teorema de Farkas. En el caso infinito hemos logrado dicha caracterización a través de una condición geométrica referida al cono convexo K_c generado por

$$\{(a_t,\gamma_t),\ \gamma_t \geq \beta_t,\ t \in T\} \subset R^{n+1}$$

Con mayor precisión, hemos demostrado ((3) y (6)) que:

$a'x \leq \beta$ es consecuente de $\{a_t'x \leq \beta_t,\ t \in T$, sí y sólo sí (a,β) pertenece a la clausura $\bar{K}_c$ de K_c.

Por construcción, es evidente que K_c depende de la representación de S. Sin embargo, cualquier otra representación de S tiene asociado el mismo $\bar{K}_c$. Se prueba así mismo ((3) y (6)) que la consistencia del sistema viene determinada por $\bar{K}_c$. En efecto:

$S \neq \Phi$ si y sólo sí $(\vec{0},-1) \notin \bar{K}_c$.

También el cono K_c nos ha permitido caracterizar los sistemas de Farkas-Minkowski de singular relevancia en la T$^{\underline{a}}$ de la Dualidad en PSI((4)).

REPRESENTACION FINITA LINEAL EQUIVALENTE

Mientras que R^2 todo sistema lineal homogéneo admite una representación finita equivalente, se puede demostrar, por contraejemplo, la imposibilidad de efectuar tal reducción en general si el sistema es no homogéneo o, aún siéndolo, si se considera un espacio de dimensión superior. Es más, incluso en el caso mencionado en primer lugar, la obtención de un método que permita encontrar la representación finita equivalente no es nada fácil ((5) y (6)).

A través del cono de relaciones consecuentes podemos así mismo caracterizar aquellos sistemas lineales que admiten una representación finita:

El sistema $\{a_t'x \leq \beta_t$, $t \in T$ admite una representación finita sí y sólo sí $\bar{K}_c$ es un cono poliédrico ((5) y (6)).

El resultado anterior es existencial y procede buscar métodos operativos para la determinación de la representación finita, cuando existe. Una condición suficiente que aportamos, en esta dirección, es la siguiente:

Si el conjunto $\{(a_t,\beta_t)$, $t \in T\}$, o su envoltura cerrado-convexa, P, es un polítopo, entonces S admite representación finita.

La condición anterior es fácilmente verificable en muchos casos, como por ejemplo cuando T es un polítopo de R^m y a_t, β_t son lineales (en muchos problemas reales de PSI, T es un intervalo cerrado).

Proponemos el siguiente método de reducción:

Se determinan (d_i,δ_i), $i=1,\dots,r$, vértices y direcciones de las artistas infinitas de P. Entonces, el sistema finito $d_i'x \leq \delta_i$, $i=i,\dots,r$, es equivalente al dado.

En el caso particular de que T, o su envoltura cerrado-convexa, venga dado a través de un sistema finito de desigualdades lineales, puede efectuarse la reducción en las siguientes dos etapas:

1.- Aplicando un método de descripción completa se obtendran los vértices y direcciones extremas de T (o de su envoltura cerrado-convexa), que denotaremos t_i, $i = 1,\dots,p$.

2.- El sistema original será equivalente al:
$a_{t_i}' x \leq \beta_{t_i}$, $i=1,\dots,p$.

El método de reducción último, no supone la consistencia del sistema original, por lo que puede emplearse como test de consistencia para este tipo de sistema infinitos (métodos para decidir la consistencia de un sistema lineal finito pueden encontrarse en (1)).

Si la familias de funciones f_t, $t \in T$, es acotada superiormente en todos los puntos de C, se puede escribir, en teoría:

$$S = \{x \in C / \sup_{t \in T} f_t(x) \leq 0\}$$

Si además, el supremo es accesible en todos los puntos, se puede expresar $S = \{x \in C / m(x) \leq 0\}$, donde $m(x)$ representa la función máximo de la familia sobre C.

Este sugestivo tratamiento conlleva diferentes dificultades:

1.- Si bien es cierto que $m(x)$ conserva, bajo ciertas condiciones, la cuasiconvexidad, la convexidad y la continuidad, no lo es menos que no se preserverá la cuasiconvexidad explícita ni la diferenciabilidad, siendo esta última propiedad especialmente relevante en Programación Matemática. En (2) y (5) se precisan todas estas cuestiones, aportándose ejemplos en los que se calibra el alcance de este tratamiento.

2.- En cualquier caso, la obtención de $m(x)$ es computacionalmente muy compleja (equivale a resolver infinitos problemas de optimización, sobre T).

Otra aproximación posible al problema nos permite afirmar, bajo condiciones muy generales, la existencia de una representación finita de S mediante una función convexa en R^n (y por lo tanto continua) y un número finito de lineales. Con exactitud: sólo se requiere de las funciones f_t que sean cuasiconvexas y semicontínuas inferiormente.

Finalmente, para el caso particular de que T sea un poliedro de R^m, y las funciones f_t sean cuasiconvexas en T, S admite también una representación finita que involucra exclusivamente a las restricciones correspondientes a los vértices de T. Los dos últimos resultados se encuentran también demostrados en (2) y (5).

BIBLIOGRAFIA

1. Fan, K.; On Systems of Linear Inequalities, Annals of Mathematics Studies, 38-1956
2. Goberna,M.A.; Nuevos resultados en la $T^{\underline{a}}$ de la Programación Semiinfinita No-lineal. Tesis doctoral. Universidad de Valencia, 1979.
3. Goberna,M.A., López,M. y Pastor,J.; Infinite linear Inequality Systems: Consequence Relations ans Consistency, Sometido a Mathematics for Operations Research.
4. Goberna,M.A., López,M. y Pastor,J.; Farkas-Minkowski Systems in Semiinfinite Programming, sometido a Mathematics for Operations Research. 1980.
5. Goberna,M.A., López,M. y Pastor,J.; Representación finita de Sistemas de infinitas inecuaciones, sometido a Trabajos de Estadística e I.O. 1980
6. Pastor,J.; Aportaciones a la $T^{\underline{a}}$ de la Programación Semiinfinita Lineal, Tesis doctoral. Universidad de Valencia.1979.