

TRATAMIENTO NUMERICO DE UN PROBLEMA DE MEMBRANA SEMIPERMEABLE.

B. Dugnol, J. Valdés

E.T.S. Ing. de Minas
 Universidad de Oviedo

ABSTRACT: The elliptic problem.

$$\begin{aligned}
 & -\Delta u + \lambda u = f, \quad x \in \Omega \\
 & u \geq h; \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \quad (u-h) \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial \Omega
 \end{aligned}$$

admits three equivalent formulations, which permits it solve by means discretization, and at a time to determine upper bounds for the error. We presents a algorithm to resolve the associated problem of quadratic optimization and a program that allows to the effective solution.

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^2 , con frontera $\partial \Omega$ suficientemente regular. Nos proponemos analizar el problema modelo que consiste en determinar $u(x) \in H^1(\Omega)$ de manera que

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \lambda u = f \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$u(x) \geq 0, \quad \frac{du}{dn}(x) \geq 0, \quad u(x) \cdot \frac{du}{dn}(x) = 0 \quad x \in \partial \Omega$$

siendo λ una constante real, $f \in L_2(\Omega)$ dada y n la normal exterior a $\partial \Omega$. Esta formulación le designamos con el vocablo DIF

1- Como se sabe (E), este problema admite dos formulaciones equivalentes:

a) DVAR: Determinar $u(x) \in K$ tal que

$$a(u, v-u) \geq f(v-u), \quad \forall v \in K \text{ siendo}$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx + \lambda \int_{\Omega} uv dx$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

$$K = \{v(x)/v(x) \in H^1(\Omega), \quad v(x) \geq 0 \text{ casi en todo punto de } \partial\Omega\}$$

b) MINQ: Calcular $u(x) \in K$ tal que $F(u) = \inf_{v \in K} F(v)$

$$\text{siendo } F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v)$$

La formulación DIF explica la motivación física del problema en el contexto de Mecánica de Medios Continuos. DVAR servirá para acotar el error cometido en la discretización, y finalmente MINQ será utilizada en el cálculo efectivo de la solución.

En la demostración de esta proposición se hace uso entre otros, del conocido Teorema de Proyección sobre un conjunto convexo que sirve, al mismo tiempo, para mostrar la no linealidad de (1).

2- Teorema de Existencia y Unicidad: El problema (1) tiene una y solo una solución.

3- Aproximación

El problema discreto que aproxima a MINQ, se construye seleccionando un subespacio de dimensión finita V_h de $H^1(\Omega)$ y un subconjunto convexo y cerrado K_h de V_h . Se trata pues de encontrar $u_h \in K_h$ tal que

$$F(u_h) \leq F(v_h) \tag{2}$$

$\forall v_h \in K_h$. En nuestro caso, V_h será el subespacio de elementos finitos con triángulos de COURANT engendrado por el conjunto de funciones de base $\{\phi_K\}$ y K_h estará formado por las combinaciones lineales $\sum C_K \phi_K$ tales que $C_K \geq 0$ si K es un punto nodal sobre $\partial\Omega$.

Se puede establecer una cota superior para la distancia

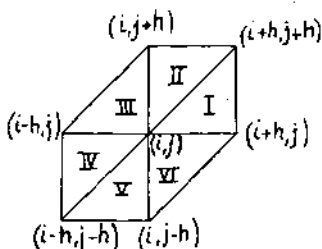
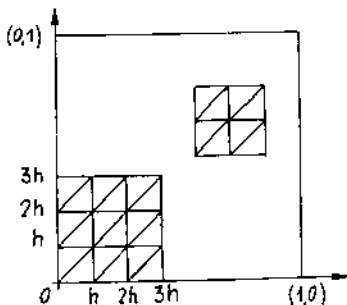
$\|u - u_h\|_H$ en la forma descrita por R.S.FALK (1974). Resulta $\|u - u_h\|_H^2 \leq \delta h^2$, siendo h la longitud del lado del triángulo que lo tenga mayor y δ una constante independiente de h .

El proceso de minimización del funcional consiste en un método de relajación similar a los propuestos por AUSLENDER (A) y GLOWINSKI (D): Sea $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_N$ donde $K_j = \{C_j / C_j \geq K_j\}$ ($j = 1, \dots, p$) $K_j = R$ ($j = p+1, \dots, N$).

Partimos de un punto cualquiera $(C_1^0, C_2^0, \dots, C_N^0)$ y al cabo de m iteraciones llegamos al punto $(C_1^m, C_2^m, \dots, C_N^m)$. El esquema de la iteración $m+1$ es el siguiente:

- Se minimiza F sobre K_i , lo que equivale a minimizar sobre R y proyectar sobre K_i . Es decir, si resulta $C_i^{m+1/4}$ en la minimización sobre R , tenemos $C_i^{m+2/4} = \max\{k_i, C_i^{m+1/4}\}$.
- Se calcula $C_i^{m+3/4} = (1-\omega)C_i^m + \omega C_i^{m+2/4}$ $\omega \in (0, 2)$
- Se proyecta este punto sobre K_i : $C_i^{m+1} = \max\{k_i, C_i^{m+3/4}\}$.

Sobre el cuadrado $(0,1) \times (0,1)$, adoptamos el esquema de subdivisión que se describe en la figura adjunta. El espacio de aproximación V_h está engendrado por $(N+1)^2$ funciones de base



$$(3) \rightarrow \varphi^{ij}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{h}(i+h-x_1) & (x_1, x_2) \in \text{I} \\ \frac{1}{h}(j+h-x_2) & (x_1, x_2) \in \text{II} \\ \frac{1}{h}(j+h-i+x_1-x_2) & (x_1, x_2) \in \text{III} \\ -\frac{1}{h}(i-h-x_1) & (x_1, x_2) \in \text{IV} \\ -\frac{1}{h}(j-h-x_2) & (x_1, x_2) \in \text{V} \\ \frac{1}{h}(j-h-i+x_1-x_2) & (x_1, x_2) \in \text{VI} \end{cases}$$

lineales a trozos. cuyas expresiones pueden ser clasificadas en uno de cuatro tipos, según que el nudo asociado pertenezca al interior (tipo A), a la frontera exceptuando los vértices (tipo B), sean los vértices (1,0) ó (0,1) (tipo C), ó los vértices (0,0), (1,1) (tipo D). Por ejemplo, la expresión correspondiente a una función de base de tipo A es de la forma (3).

Renumerando adecuadamente los nudos, podemos escribir $(N+1)^2$
 $v_h = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k$ y el funcional que debemos minimizar en K_h es entonces $F(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - f(v_h) = \frac{1}{2} \sum a_{kk} C_k^2 + \sum a_{kl} C_k C_l - \sum b_k C_k$
 siendo $a_{kk} = 6\lambda \frac{h^2}{12} + 4$ si k es de tipo A, $a_{kk} = 3\lambda \frac{h^2}{12} + 2$ (tipo B),
 $a_{kk} = 2\lambda \frac{h^2}{12} + 1$ (tipo D), $a_{kk} = \lambda \frac{h^2}{12} + 1$, (tipo C).

$$a_{kl} = -\frac{1}{2} + \lambda \frac{h^2}{24} \quad \text{si } k \text{ y } l \text{ son nudos en } \partial\Omega \text{ consecutivos;}$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} + \lambda \frac{h^2}{24}\right) \quad \text{si la distancia } kl \text{ es } h \text{ y uno al menos}$$

interior;

$$= 2\lambda \frac{h^2}{24} \quad \text{si la distancia } kl \text{ es } h\sqrt{2}$$

$$a_{kl} = 0 \quad \text{en cualquier otro caso.}$$

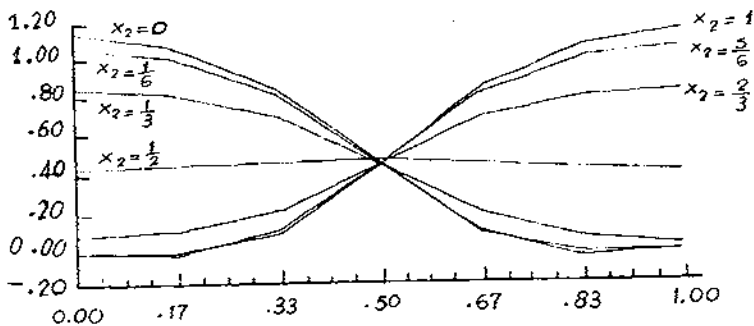
Para determinar los coeficientes b_k , debemos precisar f .
 Tomamos

$$f \equiv 10 \quad \text{si } (x_1, x_2) \in \left\{ \left(0 < x_1 < \frac{1}{2}\right) \times \left(0 < x_2 < \frac{1}{2}\right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{2} < x_1 < 1\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{2} < x_2 < 1\right) \right\} = \Omega_1$$

$f \equiv -10$ en el resto del cuadrado $\rightarrow \Omega_2$

El valor de $\int_{\Omega} f \phi_k$ es $f \frac{h^2}{6}$ si f es constante y ω un sólo triángulo. Si Δ_k es el asiento local de ϕ_k , $b_k = 10 \frac{h^2}{6} (n_1 - n_2)$, siendo n_i el nº de triángulos de $\Delta_k \cap \Omega_i$ ($i=1,2$).

Para $\lambda = 1$, los resultados sobre un sistema HP 1000/45 tomando una red de 72 triángulos, se resumen en la figura adjunta



en la que se muestran las secciones de la solución por $x_2 = 0$, $x_2 = h, \dots$. - El coeficiente de relajación utilizado fue $\omega = 1.45$ realizándose el test de parada con error 0.0 para la función objetivo con 81 iteraciones. Se observa, como parte de la solución, el subconjunto de $\partial\Omega$ sobre el que es $u = 0$. En el resto de la frontera será $\frac{du}{dn} = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- A- AUSLENDER, A. - Optimization. Méthodes Numériques. (1976).
- B- CIARLET, P.G. - The Finite Element Method for Elliptic Problems (1978).
- C- FALK, R.S. - Error Estimates for the Approximation of a Class of variational Inequalities (1974).
- D- GLOWINSKI, R. - Sur la Minimisation, par Surrelaxation avec Projection, de Fonctionnelles Quadratiques dans les Espaces de HILBERT (1973).
- E- GLOWINSKI, R. - LIONS, J.L. - TREMOLIERES, R. - Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles. (1976).

