Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

MOVIMIENTO ROTO-TRASLATORIO DE UN SOLIDO TRIAXIAL EN INTERACCION GRAVITATORIA CON UNA ESFERA.

R. Cid, J.M. Ferrándiz

Dpto. de Física de la Tierra y del Cosmos
Universidad de Zaragoza

Abstract.- *A system of two rigid bodies S_o, S, attracting each other according to Newton's law, where S is a spherical body and S a triaxial body, is considered. The motion of the body S relative to the body S_o is studied in canonical variables of Delaunay and Andoyer. After straightforwards eliminations and changes of variables, the problem is integrated up to the second order of perturbation by means of the Deprit's method.*

1.- INTRODUCCION.

A la extensa bibliografía existente sobre el movimiento de un sólido alrededor de un punto fijo, comienzan a sumarse, durante el presente siglo, algunos trabajos sobre el movimiento conjunto de dos sólidos, que, en ciertos casos particulares fue tratado por Kondurar (1936-1954) y en el caso general de n sólidos ha sido investigado por Duboshin (1958).

La enorme dificultad del problema, aun cuando se trate solamente de dos sólidos, coincide con la escasez de resultados obtenidos. Deben citarse, sin embargo, algunas investigaciones de Johson y Kane (1969) y Brower (1946) en su aplicación al problema de estrellas dobles y las de Kondurar (1962-64), Ossipov (1969-1973), Eroshkin (1974), etc., en el estudio de la rotación lunar. Son, no obstante, numerosos los trabajos dedicados a obtener diversas expresiones del potencial de dos sólidos, como los de Kondurar (1958-76), Vidyakin (1972), Duboshin (1976), etc., si bien no han sido seguidos de otros en los que se intente la integración del problema en casos generales.

Recientemente, debido al desarrollo de teorías de perturbaciones basadas en la existencia de un pequeño parámetro (Von Zeipel 1916, Hori 1966, Deprit 1969, etc.), es posible conseguir integraciones aproximadas en determinados problemas, como sucede en el caso de casi-esfericidad, rotaciones rápidas, etc., sobre las cuales puede consultarse Ferrándiz (1979, tesis).

Especial atención es dedicada actualmente a diversos problemas particulares y mas concretamente a dos: Estudio del movimiento rotatorio de un satélite artificial y del movimiento de dos sólidos, cuando uno de ellos es una esfera. Refiriéndonos a este último, debemos señalar los trabajos de Duboshin (1958-9), quien investigó la existencia y clasificación de soluciones particulares de equilibrio (llamadas por él regulares) y la estabilidad en determinados casos.

Estos trabajos han sido continuados por Kondurar (1960), Hamill y Blitzer (1974), Barkin (1976), Weiner (1963), Mohan y otros (1972), etc.

La presente comunicación se ocupa de la integración de las ecuaciones del movimiento relativo (roto-traslatorio) de un sólido triaxial, atraído por una esfera, en el supuesto de que aquel tenga una distribución de masas próxima a la esférica.

2.- FORMULACION HAMILTONIANA DEL PROBLEMA.

Se considera una esfera S_o, de masa m_o y centro O, y un sólido triaxial S, de masa m y centro de gravedad C, cuyos ejes principales de inercia definen un sistema móvil $Ox_1x_2x_3$, y su referencia a un sistema inercial o fijo $OXYZ$ viene dada por medio de una matriz A que se expresa en función de los ángulos de Euler (ψ,θ,ϕ) en la forma habitual, como producto de tres giros; $A = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)$, donde $R_\kappa(\zeta)$ denota una rotación de amplitud ζ alrededor del eje $\kappa(= 1,2,3)$. Se designarán por (I_1,I_2,I_3) los momentos principales de inercia del sólido S, según los ejes $Ox_1x_2x_3$, por I el momento de inercia en la dirección del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OC}$, por $\vec{\omega}$ $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ el vector velocidad angular del sólido S, por J la matriz diagonal de inercia (referida a los ejes principales), por $\eta = m_om(m_o+ m)$ un factor constante y por f la constante de gravitación universal. Se supone, finalmente, que la mutua atracción obedece a la ley de Newton y el sólido S tiene una distribución de masas próxima a la esférica $(I_i- I_k \simeq 0)$.

En estas condiciones, el problema del movimiento relativo de sólido S con respecto a S_o tiene la energía cinética T (salvo un sumando constante) y el potencial V, dados por las igualdades $\left[\kappa = f\eta(m_o+m)\right]$

$$2T = \eta\dot{\vec{r}}^2 + \vec{\omega}\cdot J\vec{\omega} \qquad V = -\frac{\kappa}{r}\left[1 + \frac{1}{mr^2}(I_1+I_2+I_3-3I)\right] \qquad (1)$$

Si $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ son los cosenos directores de la recta $\overline{OC}$ con respecto al sistema móvil, el problema puede ser planteado en forma canónica de hamiltoniano

$$F = -\frac{\kappa^2}{2L^2} + \frac{1}{2}\left[(M^2-N^2)\left(\frac{\mathrm{sen}^2\nu}{I_1} + \frac{\cos^2\nu}{I_2}\right) + \frac{N^2}{I_3}\right] \qquad (2)$$
$$- \frac{\kappa}{mr^3}\left[(I_1-I_2)(1-3\cos^2\alpha_1) + (I_3-I_2)(1-3\cos^2\alpha_3)\right]$$

en el conjunto de variables $(L,G,H,l,g,h;\Lambda,M,N,\lambda,\mu,\nu)$, siendo (l,g,h) las variables angulares de Delaunay, (λ,μ,ν) las variables angulares de Andoyer, (L,G,H) los habituales momentos conjugados de (l,g,h) multiplicados por η y (Λ,M,N) los momentos conjugados de las variables (λ,μ,ν).

El sistema diferencial así planteado, de orden 12, posee cuatro integrales (Leimanis, 1965) representadas por las ecuaciones

$$\eta(\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}) + AJ\vec{\omega} = \vec{c} \qquad\qquad \eta\dot{\vec{r}}^2 + \vec{\omega}\cdot J\vec{\omega} = -2V + q$$

donde $\vec{c} = (c_1,c_2,c_3)$ y q son constantes de integración.

Eligiendo el sistema fijo de modo que OZ lleve la dirección del vector $\vec{c}$, o lo que es igual $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = c = |\vec{c}|$, se comprueban las relaciones $\lambda - h = \Pi$, $2H = c + (G^2-M^2)/c$, $2\Lambda = c + (M^2-G^2)/c$, que pueden ser utilizadas para la simplificación del problema.

3.- DESARROLLO DEL HAMILTONIANO.

Poniendo $b = 180° - g - v$, donde v es la anomalía verdadera del movimiento orbital de S con respecto a S_o, y teniendo en cuenta las relaciones $H = G\cos i$, $\Lambda = M\cos\varepsilon$, $N = M\cos\sigma$, entre los ángulos i, ε, σ, y los momentos Λ, M, N, la referencia del vector $\overrightarrow{OC}$ al sistema móvil vienen dada por la matriz producto $R_3(b)R_1(i+\varepsilon)R_3(\mu)R_1(\sigma)R_3(\nu)$, lo que permite expresar $1-3\cos^2\alpha_3$ en la forma

$$1-3\cos^2\alpha_3 = 2\sum_{n=0}^{7} A_K\cos a_K = 2U$$

siendo $a_o = 0°$, $a_1 = \mu$, $a_2 = 2\mu$, $a_3 = 2b$, $a_4 = \mu-2b$, $a_5 = \mu+2b$, $a_6 = 2\mu-2b$, $a_7 = 2\mu+2b$ y dependiendo los coeficientes de (G,H,Λ,M,N).

De forma análoga, si ponemos $\beta_K = 2\nu+a_K$, $\gamma_K = 2\nu-a_K$, se obtiene

$$1-3\cos^2\alpha_1 = \sum_{n=0}^{7}(-A_K\cos a_K + B_K\cos\beta_K + C_K\cos\gamma_K) = -U+W$$

con B_K, C_K, funciones de los mismos momentos.

Ahora bien, si I_i-I_k puede ser considerado como un pequeño parámetro y hacemos $k_o = (2/I_3-1/I_1-1/I_2)$, $k_1 = (2I_3-I_1-I_2)/2$, la función hamiltoniana puede separarse en dos términos F_o, F_1, de órdenes cero y uno, respectivamente, cuyas expresiones son

$$F_o = -\kappa^2/2L^2 + M^2(1/I_1+1/I_2)/4$$
$$F = N^2k_o + \frac{1}{2}(M^2-N^2)(1/I_2-1/I_1)\cos 2\nu + \frac{\kappa}{mr^3}\left[k_1U + (I_2-I_1)W\right]$$

Entonces, si en el sistema diferencial a que hemos llegado, hacemos uso de las fórmulas de Hansen y promediamos sobre la anomalía media l y el ángulo μ, siguiendo el método de Deprit, todas las variables angulares con excepción de ν desaparecen del hamiltoniano y obtenemos uno nuevo, cuyo término de orden cero coincide con el anterior y cuya perturbación o término de orden uno se puede escribir así

$$F_1 = N^2 k_\circ + (\kappa^4/mL^3G^3)(k_1' + k_2'\cos 2\nu)$$

siendo k_1', k_2', coeficientes que dependen de los momentos de inercia I_k, de los momentos constantes G, H, Λ, M, y de momento variable N.

Finalmente, una nueva transformación canónica, definida por las relaciones

$$X = \sqrt{M^2-N^2}\,\mathrm{sen}\nu \qquad x = \sqrt{M^2-N^2}\cos\nu \qquad ds/dt = Nw$$

con w = cte., permite la integración del sistema en la forma

$$X = C_\circ \mathrm{sen}(s-s_\circ) \qquad x = C_\circ Q\cos(s-s_\circ)$$

siendo Q una nueva constante.

Evidentemente, cuando se quiere obtener la relación que liga a las variables independientes s, t, es necesario recurrir a la introducción de algunas funciones elípticas y las fórmulas anteriores se escriben

$$X = C_\circ \mathrm{sn}\left[\rho(t-t_\circ)\right] \qquad x = C_\circ Q\,\mathrm{cn}\left[\rho(t-t_\circ)\right]$$

donde $\rho = \sqrt{M^2-C_\circ^2}/w$.

Aun cuando el formulario completo no puede reproducirse aquí, por falta de espacio, podemos asegurar que la mencionada resolución es mucho mas sencilla que la dada por Kinoshita (1972) para este mismo caso.

BIBLIOGRAFIA

Y.V. Barkin (1976): Soviet Astr. 20, 5, 628-633.

D. Brouwer (1946): A. J. 51, 8, 223-231. (1946): A. J. 52, 3, 57-63.

G.N. Duboshin (1958): Soviet. Astr. 2, 2, 239-250. (1959): id. 3, 1, 154-165 165. (1960): id. 3, 4, 702-712.

G.I. Eroshkin (1974): Soviet. Astr. 17, 6, 808-810.

J.M. Ferrándiz (1979): Tesis doctoral.

P.J. Hamill y L. Blitzer (1974): Cel. Mech. 9, 1, 127-146.

D. Johnson y T.R. Kane (1969): A. J. 74, 4, 563-567.

V.I. Kondurar (1958): Soviet. Astr. 2, 5, 712-780. (1960): id. 3, 5, 863-875. (1962): id. 5, 5, 739-748. (1964): id. 7, 4, 576-582.

E. Leimanis (1965): The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Springer-Verlag. Berlin.

S. Mohan y otros (1972): Cel. Mech. 5, 2, 157-173.

G.F. Ossipov (1969): Soviet. Astr. 13, 1, 129-134. (1970): id. 14, 2, 336-339. (1973): id. 17, 2, 281-284.

V.V. Vidyakin (1972): Soviet. Astr. 16, 3, 522-526.

S.D. Weiner (1963): A. J. 68, 2, 93-95.