Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

UNA VERSION ADITIVA DEL TEOREMA ERGODICO DE VON NEWMAN

Luis A. Sarabia

Colegio Universitario de Burgos

ABSTRACT. The main result of this paper is the following: Let (Ω,Θ,J) be a probabilistic space finitely additive, P a biyective application of Ω on Ω such that: i) $P(E)\epsilon\ \Theta$ iff $E\ \epsilon\ \Theta$ ii) $J(P(E)) = J(E)$, $E\epsilon\Theta$ and the family of linear operators T^n defined in $V^1(\Omega,\Theta,J)$ by $(T^nF)(E) = F(P^n(E))$. Then, for every $F\ \epsilon\ V^1(\Omega,\Theta,J)$

$$\frac{1}{n}\ \left(\sum_{m=1}^{n} T^m F\right) \rightarrow E(F/\ell) \text{ in norm },$$

ℓ being the subalgebra of Θ formed by P-invariants sets. This convergence is almost surely for uniforms limits of step functions, in a certain sense, it is the best possible.

INTRODUCCION. En lo que sigue (Ω,Θ,J) es un espacio probabilístico finitamente aditivo formado por un conjunto Ω , un álgebra de subconjuntos Θ y una probabilidad finitamente aditiva J sobre Θ.

$V^p(\Omega,\Theta,J)$ $1 \leq p \leq \infty$ son subespacios del de las funciones aditivas definidas en Θ , acotadas y absolutamente continuas respecto de J que tienen norma p finita . Para ella son retículos completos de Banach y si $p<q$ entonces $V^p \supset V^q$ Vease [2] y [3] para otras propiedades.

Finalmente P es una aplicación biunívoca de Ω en Ω Θ-medible y J-invariante. Si definimos $(T^nF)(E) = F(P^n(E))$, $\forall\ E\epsilon\Theta$ y cualquier elemento de V^p , es claro que T^nF es una función aditiva definida en Θ y absolutamente continua respecto de J, luego de $V^1(\Theta)$ Como $\| T^nF\|_p = \|F\|_p$ tenemos que T^n es un operador lineal, de norma uno, de $V^p(\Theta)$ en $V^p(\Theta)$

1.- CONVERGENCIA EN NORMA. Por ser de norma uno la familia de operadores T^n , n=1,2,... es equicontinua en el sentido de [4] (pag. 213).

Si además tenemos en cuenta que $V^2(\Theta)$ es reflexivo ([2]) y de Banach por tanto localmente secuencialmente compacto por la topología débil de $V^2(\Theta)$ (teorema de Eberlein-Smulian, [4] pág 141) estamos en condiciones de aplicar el teorema ergódico de [4] (pág. 214) que a continuación enunciamos, en él $T_n = (\sum_{m=1}^{n} T^m)/n$. Si en un espacio X, de Banach, localmente secuencialmente compacto por la topologia débil tenemos definido un operador T, lineal y continuo de modo que la familia T^n, es equicontinua, se cumple que $\forall\, x \in X$, $\lim_n T_n(x) = x_o$ existe y el operador $T_o(x) = x_o$ es lineal continuo y verifica $T_o = T_o^2 = T\,T_o = T_o\,T$. En nuestro caso:

1.1 PROPOSICION .- Sean P y T^n, n=1,2,,... definidos como en la introducción . Entonces para todo F de $V^2(\Theta)$ existe $\lim_n T_n F = F_o$ y $T(F_o)=F_o$.

1.2 PROPOSICION .- Con las mismas hipótesis sobre P y T se cumple que $\lim_n T_n F = F_o$ para todo F de $V^1(\Theta)$, además $T(F_o) = F_o$.

Demostración : Para las funciones simples de $V^1(\Theta)$ el resultado es cierto porque pertenecen también a $V^2(\Theta)$ y la norma como elemento de V^1 es menor que la norma como elemento de V^2. Por otro lado, dada F de V^1 las simples de la forma F_Δ tienden a F al afinar Δ ($\Delta = \{E_\gamma\}$ es una partición cualquiera de Ω formada con conjuntos de Θ), lo que unido a la desigualdad:

$$\| T_n F - T_m F \|_1 \leq \| T_n F - T_n F_\Delta \|_1 + \| T_n F_\Delta - T_m F_\Delta \|_1 + \| T_m F_\Delta - T_m F \|_1 \leq$$

$$\leq 2 \| F - F_\Delta \|_1 + \| T_n F_\Delta - T_m F_\Delta \|_2$$

proporciona la primera parte del resultado. La segunda es inmediata por ser T continuo e isométrico.

1.3 COROLARIO .- Con las mismas hipótesis sobre P y T , $F_o = E(F/\ell)$, dónde ℓ es la subálgebra de Θ formada por los conjuntos P-invariantes.

Demostración : El criterio de convergencia en V^1 de [2] (pág. 538) garantiza que $F_o(E) = \lim_n T_n F(E)$ uniformemente en $E \in \Theta$. Si E es P-invariante $F_o(E) = F(E) = T_n F(E)$, n=1,2,... , es decir $F_o = E(F/\ell)$ ya que esta condición caracteriza a la esperanza condicionada [3] (prop. 4.10)

1.4 COROLARIO .- Con ℓ como en 1.3 , sea $V^1(\ell)$ el subespacio vectorial de $V^1(\Theta)$ cerrado, generado por límites de simples asociadas a particiones de Ω formadas con conjuntos de ℓ . Entonces $V^1(\ell) = \{ F \in V^1(\Theta) \ / \ TF = F \}$

Demostración: Si $A \in \mathcal{l}$ entonces $J \circ A(E) = J(A \cap E) = T(J \circ A)(E)$ $\forall E \in \Theta$, luego $J \circ A$ es invariante. Reciprocamente si $J \circ A$ es invariante y $P(A) \neq A$ tendremos $J(A \Delta P(A)) = 0$ es decir $I_A - I_{P(A)}$ es J-nula [1] (pág. 103) lo que implica que $J \circ A$ y $T(J \circ A)$ son el mismo elemento de $V^1(\mathcal{l})$. Es decir $J \circ A$ es invariante si y solamente si A es casi seguro invariante.

Como las F invariantes son el núcleo del operador lineal continuo $T - I$, forman un subespacio vectorial cerrado de $V^1(\Theta)$ y las escalonadas son densas , después de lo anterior $V^1(\mathcal{l}) \subset \{ F/ \ TF = F \}$. La otra contención es inmediata a partir del corolario 1.3.

2.- CONVERGENCIA CASI SEGURA. En [3] se demuestra que existe una aplicación biunívoca que mantiene el orden y las normas entre cada $V^p(\Theta)$ y cada $L^p(\Omega,\Theta,J)$ $1 \leq p \leq \infty$. Siendo los L^p los completados de los construidos en [1] (pág. 119) cuando $1 \leq p < \infty$ y en [3] para $p=\infty$. Por tanto todo lo dicho en la sección anterior es transcribible para funciones integrables respecto de una probabilidad finitamente aditiva, entendiendo como integrable las que son límite en probabilidad de una sucesión de Cauchy de simples Θ- medibles y sus integrales tienen límite. En este contexto diremos que una sucesión f_n de funciones integrables converge casi seguro a f si tiende en probabilidad a cero la sucesión $\sup._{n \geq k} |f_n - f|$.

2.1 PROPOSICION .- Sea f límite uniforme de simples Θ-medibles, F la función de $V^1(\Theta)$ que le está asociada, entonces con las mismas hipótesis sobre P y T que en la introducción $\lim._n T_n F = E(F/\mathcal{l})$ casi seguro.

2.2 LEMA .- Con las hipótesis de 2.1 lim. $\sup._n T_n F$ es de $V^1(\mathcal{l})$, asi como el límite inferior.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$ existe $G = \Sigma_\Delta a\gamma \, J \circ E\gamma$ de modo que $|F - G| \leq \varepsilon J$ con $\Delta = \{ E\gamma \}$ de Θ , en consecuencia $(\min._\Delta a\gamma - \varepsilon)J \leq T_n F \leq (\max._\Delta a\gamma - \varepsilon)J$ y $V^1(\Theta)$ es retículo completo, luego los límites superior e inferior de $T_n F$ existen en $V^1(\Theta)$. Por otro lado es inmediato comprobar que son $\mathcal{l}$-medibles a partir de 1.4, y la convergencia en norma.

Demostración de la proposición: La linealidad de las T_n y la $E(F/\mathcal{l})$ nos permite considerar únicamente el caso en que $F \geq 0$. Se cumple que $E(F/\ell) \leq$ $\leq \lim. \sup. T_n F$, si la desigualdad fuera estricta, en particualar para Ω y cualquier M entero positivo existirán $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ índices posteriores y una partición $E_1, \ldots, E_n$ de Ω cumpliendo $\sum_{i=1}^{n} T_{m_i} F(E_i) >$ $E(F/\ell)(\Omega) = F(\Omega)$ Ahora bien dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe G, simple, de modo que $|F - G| < \frac{\varepsilon}{2} J$, sea Δ la partición más fina que la que define a G y la formada por los E_i. Es sencillo comprobar que $F_\Delta = \sum_\Delta (F(E\gamma)/J(E\gamma)) J \circ E\gamma$ cumple $|F_\Delta - G| < (\varepsilon/2) J$ y por tanto $|F_\Delta - F| < \varepsilon J$ De ello se sigue que $\sum_{i=1}^{n} T_{m_i} F(E_i) \leq \varepsilon J(\Omega) + F(\Omega) + R$, dónde R es un resto que tiende a cero al crecer M. Como ε es arbitrario tenemos que $(\lim. \sup._n T_n F)(\Omega) = F(\Omega) =$ $= E(F/\ell)(\Omega)$. El mismo razonamiento es válido si en vez de Ω hubiéramos considerado un conjunto B invariante por P, ya que entonces dada la partición E_i de B la $P(E_i)$ también lo es, en consecuencia $\forall B \in \ell$ $F(B) =$ $= (\lim. \sup._n T_n F)(B)$, después del lema 2.2 y la caracterización de la esperanza condicionada $E(F/\ell) = \lim. \sup._n T_n F$ y con ello $0 \leq T_n F - E(F/\ell)$ $\leq \sup_{m \geq n} T_m F - E(F/\ell) \downarrow 0$ cuando $m \to \infty$, es decir $T_n F$ tiende casi seguro a $E(F/\ell)$ como queríamos demostrar.

En cierto sentido este resultado no es mejorable, pues es sencillo dar contraejemplos para el caso en que la función f sea integrable, incluso casi seguro finita y sin embargo no se de la convergencia casi segura en el sentido que hemos utilizado aquí.

BIBLIOGRAFIA

1 DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J.T. Linear operators. Part. I. Iterscience Publishers (1958)

2 LEADER, S. The theory of L^p spaces for finitely additive set functions Annals of Mathematics. Vol 58, nº 3, pág. 528-543 (1953)

3 SARABIA, L. Esperanzas condicionadas para probabilidades finitamente aditivas. Sin publicar.

4 YOSIDA, K. Functional Analysis (3ª edición) Springer Verlag (1971).