Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE LA UTILIZACION DE MODELOS ESTOCASTICOS EN NEUROFISIOLOGIA

C. Santisteban Requena

Dpto. de Bioestadística
Universidad Autónoma de Madrid

Abstract

This is a way to calculate the neuron-associated transfer function in physiological processes, in which the entry is an random signal or series of random signals, particularity occurring in a Poisson distribution. Here we consider the case of a linear system only.

I.- INTRODUCCION

La aplicación de la teoría de los procesos estocásticos a los sistemas neuronales, se basa fundamentalmente en la importancia funcional de la actividad de las neuronas. Usando las consideraciones de Franck (3) en el estudio de modelos para procesos de excitación biológica, admitimos para los impulsos el principio de "todo o nada".

El uso de señales aleatorias con un amplio espectro de frecuencias presenta grandes ventajas (Bendat y Piersol 1966). El espectro de entrada, el espectro de salida y el espectro cruzado, se pueden obtener en forma conveniente usando transformadas de Fourier, tanto para entradas sinusoidales como para trenes de impulsos (French y Holden 1971). Recientemente se han llevado a cabo estudios sobre sistemas lineales (Stein, French y Holden, 1972) y no lineales (P.Z. Marmarelis y K-I Nara 1972) aplicando en éstos últimos la teoría de identificación de sistemas no lineales mediante la utilización de estímulos Gaussianos "ruido blanco" como entrada.

El modelo que vamos a presentar se considera dentro de un sistema lineal, de tiempo invariante y con entradas de Poisson.

II.- DEFINICIONES Y NOTACION

1. Sistema Lineal: "Si un sistema es lineal, existe una función g(t,z) tal que para cualquier entrada x(t) y su correspondiente salida y(t) se verifica:

$$y(t) = \int_0^t x(z)\, g(t,z)\, dz \text{ "}$$

"Si un sistema lineal es de tiempo invariante, entonces existe una función de una única variable g(t) tal que:

$$y(t) = \int_0^t x(z)\, g(t-z)\, dz \text{ "}$$

2. En relación con los sistemas neuronales, vamos a asumir la actividad neuronal como un tren de funciones "impulso-unidad", ocurriendo al azar.

Las funciones "impulso unidad" son funciones delta de Dirac y:

$$\int_R \delta(t)\, dt = 1 \qquad t \in R$$

$$\delta(t-t_o) = 0 \qquad t \neq t_o$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_o)\, dt=1 \quad t_1 \leq t_o < t_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_o)\, dt = f(t_o) \text{ siendo } f(t) \text{ contínua en } t_o.$$

Para un sistema lineal invariante en el tiempo, la respuesta impulso h(t,z) es la respuesta de un sistema lineal cuya entrada es la función impulso unidad, $\delta(t-z)$, localizada t=z

$$h(t,z) = L\{\delta(t-z)\}$$

3. Denotaremos por $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ las transformadas de Fourier de la entrada x(t) y salida y(t) para una frecuencia ω en Hertz; y por X(s) e Y(s) a las correspondientes transformadas de Laplace.

4. La transformada de Fourier de la respuesta impulso $H(i\omega)$ la llamaremos "función de transferencia". Denominación que también se utiliza para la transformada de Laplace H(s).

III.- ENTRADAS DE POISSON

Consideramos que $x(t)$ es un proceso de Poisson, o sea que admitimos que las entradas son independientes, que la probabilidad de que uno y sólo un ingreso se produzca en el intervalo $(t, t+\Delta t)$ es λt y la probabilidad de que no llegue señal en el mismo intervalo es $1-\lambda t$.

Medimos la dependencia del proceso en un tiempo dado t_1 con respecto a los valores del mismo proceso en otro tiempo t_2 mediante la función de autocorrelación:

$$R_{xx}(t_1 t_2) = E\{x(t_1), x(t_2)\} = \iint_{\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1 x_2) dx_1 dx_2$$

La dependencia de los procesos $x(t_1)$ e $y(t_2)$ se obtiene mediante la correlación cruzada

$$R_{xy}(t_1 t_2) = E\{x(t_1), y(t_2)\} = \int_{\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f(x_1 y_2) dy_2$$

Las funciones de densidad espectral correspondientes son:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} R_{xx}(z)\ e^{-i\omega z}\ dz$$

que es la función de densidad de masa.

$$S_{xy}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} R_{xy}(z)\ e^{-i\omega z}\ dz$$

que es la función de densidad espectral cruzada.

Las transformadas de Fourier de las funciones de correlación nos permiten relacionar el dominio del tiempo con el dominio de la frecuencia ω.

La respuesta de sistemas lineales a entradas al azar, vendrá dada por la integral de convolución. El dominio del tiempo de salida $y(t)$ y el de entrada $x(t)$ están relacionados por la respuesta impulso $h(t)$.

Si se toma la transformada de Fourier de la autocorrelación y de la correlación cruzada:

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2\ S_{xx}(\omega)$$

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)\ S_{xx}(\omega)$$

La función espectral de masa sólo contiene la ganancia $|H(\omega)|$ de la función de transferencia, mientras que la función espectral cruzada, que es una magnitud compleja, contiene tanto la ganancia como el componente de fase. Podemos obtener así la función de transferencia o respuesta:

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}$$

Para un proceso de Poisson com media λ y suponiendo que el número r de impulsos sea el requerido para traspasar el umbral y generar un impulso de salida; la densidad espectral de entrada es:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{\lambda}{2\pi}$$

La función de densidad de probabilidad f(t) de intervalos entre impulsos de salida, seguirá una función gamma de orden r (Cox and Miller 1965) dada por:

$$f(t) = \lambda^r t^{r-1} e^{-\lambda t}/(r-1)!$$

con media $\mu = \frac{r}{\lambda}$ y varianza $\sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2}$

y la transformada de Laplace:

$$F(s) = \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r}$$

El espectro del tren de impulsos de salida $S_{yy}(\omega)$ se puede calcular directamente a partir de la transformada de Laplace de la función de densidad de probabilidad, si como sucede en éste caso, los intervalos entre los sucesos son independientes (son los procesos de renovación, de los que el de Poisson es un ejemplo típico).

El espectro cruzado se obtiene fácilmente mediante la expresión de $H(\omega)$:

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega) S_{xx}(\omega) = \frac{1}{r} \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

IV.- DISCUSION

Cuando cada impulso o tren de impulsos de entrada, produce un impulso en la salida a través de las células nerviosas, si se considera el sistema lineal y las entradas se verifican según procesos estocásticos tipo Poisson, las salidas son perfectamente coherentes con la ley de entrada.

V.- BIBLIOGRAFIA

1.- BENDAT,J.S. y A.G. PIERSOL (1966) "Measurement and Analysis of Random Data" J. Wiley. New York.

2.- COX,D.R. y A.D. MILLER (1965) "The Theory of Stochastic Processes" Methuen and Co. Ltd. London.

3.- FRANCK,V.F. (1956) "Models for Biological Excitation Processes" Progress in Biophys and Biophys Chem. 6, 171-206.

4.- FRENCH,A.S. y A.V.HOLDEN (1971) Kybernetik 8:165.

5.- KNOX,C.K. (1974) "Cross-correlation functions for a neuronal model" Biophysical Journal. Vol: 14.

6.- MARMARELIS,P.Z. y K-I NARA (1972) "White-Noise Analysis of a Neuron Chain: An Application of the Wiener Theory" Science. Vol: 175.

7.- SANCHEZ,S. (1979) "Factores que influencian la contracción dinámica del músculo" Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid.

8.- STEIN,R.B; A.S. FRENCH y A.V. HOLDEN (1972) "The Frequency response coherence, and Information capacity of two Neuronal Models" Biophysical Yournal. Vol: 12.