Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

PROBLEMA DE SNELL EN TIEMPO CONTINUO CON HORIZONTE FINITO

Miguel San Miguel Marco, Gerardo Sanz Sáiz

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Zaragoza

ABSTRACT

In this paper, we find the Snell envelope for the process $\{ Z_t \}_{t \in [0,t^*]}$ and its limit as $t^* \uparrow \infty$, and we compare it with the Snell envelope for the process $\{ Z_t \}_{t \geq 0}$, worked out by Mertens.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo y $\{ Z_t \}_{t \geq 0}$ un proceso bien medible, adaptado a una familia creciente y continua a derecha $\{ F_t \}_{t \geq 0}$ de sub-σ-álgebras (completas) de F, de modo que $Z_T \in L^1$ para todo tiempo de parada finito.

1.- Para cada intervalo $[0,t^*]$ sea $\mathcal{T}^*$ el conjunto de tiempos de parada T, tales que $0 \leq T \leq t^*$. Consideremos un conjunto finito $\{ T_1, T_2, \ldots, T_n \}$ y monótono no creciente $(T_j \geq T_{j+1}, j = 1, \ldots, n)$ de tiempos de parada de $\mathcal{T}^*$, y definamos la siguiente super-martingala:

$$
\boxed{A} \qquad \begin{cases} X_{t^*} = Z_{t^*} \\ X_{T_1} = \max \{ Z_{T_1} , E[X_{t^*} \mid F_{T_1}] \} \\ X_{T_2} = \max \{ Z_{T_2} , E[X_{T_1} \mid F_{T_2}] \} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{T_n} = \max \{ Z_{T_n} , E[X_{T_{n-1}} \mid F_{T_n}] \} \\ X_0 = \max \{ Z_0 , E[X_{T_n} \mid F_0] \} \end{cases}
$$

Como $X_{t^*} = Z_{t^*}$, la fórmula:

$$\nu_0 = \min \{ T \in \{0, T_n, T_{n-1}, \ldots , T_1, t^*\} : X_T = Z_T \}$$

define en Ω un tiempo de parada tal que:

$$X_0 = E \left[X_{\nu_0 \wedge t^*} \mid F_0 \right] = E \left[X_{\nu_0} \mid F_0 \right] = E \left[Z_{\nu_0} \mid F_0 \right]$$

debido a que $\{ X_{\nu_0 \wedge t} \}_{t \in \{ 0, T_n, \ldots , T_1, t^*\}}$ es una martingala.

Por otra parte, aplicando a la supermartingala $\boxed{A}$ el teorema de parada de Doob, se obtiene que:

$$X_0 \geqslant E \left[X_\nu \mid F_0 \right] \geqslant E \left[Z_\nu \mid F_0 \right]$$

para todo tiempo de parada $\nu \in \{0, T_n, \ldots , T_1, t^*\}$, y, por consiguiente, ν_0 es óptimo, en el sentido de que $\sup_\nu E[Z_\nu] = E[Z_{\nu_0}]$, cuando ν recorre la familia $\{0, T_n, \ldots , T_1, t^*\}$, y se verifica que:

$$X_0 = \operatorname*{sup\ es}_{\nu \in \{0, T_n, \ldots, T_1, t^*\}} E[Z_\nu \mid F_0] \leqslant \operatorname*{sup\ es}_{\nu \in \mathcal{T}^*} E \left[Z_\nu \mid F_0 \right] \tag{1.1}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que la familia $\{ E[Z_\nu \mid F_0] , \nu \in \mathcal{T}^*\}$ es filtrante superiormente, existe una sucesión $\{ T_n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}^*$ tal que:

$$\lim_n \uparrow E[Z_{T_n} \mid F_0] = \operatorname*{sup\ es}_{\nu \in \mathcal{T}^*} E[Z_\nu \mid F_0] \tag{1.2}$$

(véase [4], p. 121).

A partir de esta sucesión $\{ T_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ de tiempos de parada se construyen las dos sucesiones de variables aleatorias siguientes:

$$
(S1) \quad \begin{cases}
\tilde{X}_{t^*} = Z_{t^*} \\
\tilde{X}_{T_1} = \max \{ Z_{T_1} , E \left[\tilde{X}_{t^*} \mid F_{T_1} \right] \} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\tilde{X}_{T_n} = \max \{ Z_{T_n} , E \left[\tilde{X}_{T_{n-1}} \mid F_{T_n} \right] \} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

$$
(S2) \quad \begin{cases}
\tilde{X}_0^1 = \max \{ Z_0 , E \left[\tilde{X}_{T_1} \mid F_0 \right] \} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\tilde{X}_0^n = \max \{ Z_0 , E \left[\tilde{X}_{T_n} \mid F_0 \right] \} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Se obtiene facilmente que

$$\underset{\nu \in \mathcal{T}^*}{\sup \text{ es }} E \left[Z_\nu \mid F_0 \right] \geqslant \tilde{X}_0^n \geqslant E \left[Z_{T_n} \mid F_0 \right] \qquad (1.3)$$

Tomando límites, cuando $n \uparrow \infty$, y de acuerdo con (1.2), se tiene que existe $\lim\limits_n \tilde{X}_0^n = \tilde{X}_0^{t^*}$ y $\tilde{X}_0^{t^*} = \underset{\nu \in \mathcal{T}^*}{\sup \text{ es }} E \left[Z_\nu \mid F_0 \right]$. (1.4)

<u>Nota</u>.- Observando (1.3) es evidente que con cualquier sucesión de tiempos de parada que verifique (1.2) se obtendrá el resultado (1.4).

Considerando, ahora, las variables aleatorias a partir de un índice t, es evidente que se obtendrá que:

$$\tilde{X}_t^{t^*} = \lim_n \tilde{X}_t^n = \underset{t \leqslant \nu \leqslant t^*}{\sup \text{ es }} E \left[Z_\nu \mid F_t \right] \qquad (1.5)$$

es decir, que $\{ \tilde{X}_t^{t^*} \}_{t \in [0,t^*]}$ es la envolvente de Snell del proceso $\{ Z_t \}_{t \in [0, t^*]}$.

2.- Consideremos ahora una sucesión, no decreciente, de instantes de parada $\{ t_n \}$ tendiendo a $+\infty$, $t_n \uparrow \infty$, y sea $\{ X_t \}_{t \geqslant 0}$ la envolvente de Snell del proceso $\{ Z_t \}_{t \geqslant 0}$, encontrada por Mertens.

Se puede obtener sin dificultad que:

$$E\left[Z_{T\wedge t_n} \mid F_t\right] \leqslant \tilde{X}_t^{t_n} \leqslant \lim_n \uparrow \tilde{X}_t^{t_n} \leqslant X_t \qquad (2.1)$$

para T (tiempo de parada) y t_n suficientemente avanzados ($T > t$, $t_n > t$), siendo $\tilde{X}_t^{t_n} = \underset{t \leqslant \nu \leqslant t_n}{\text{sup es}}\ E\left[Z_\nu \mid F_t\right]$.

Suponiendo que $\{Z_t\}_{t \geqslant 0}$ satisface la hipótesis 1 de Bismut y Skalli [1], se tiene, tomando esperanzas y límites en (2.1), que:

$$X_t = \lim \uparrow \tilde{X}_t^{t_n} = \tilde{X}_t \qquad (2.2)$$

Nota.- Cuando el proceso $\{Z_t\}_{t \geqslant 0}$ sea positivo o acotado inferiormente por una variable aleatoria integrable, también se obtiene (2.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] BISMUT, J. M. y SKALLI, B. (1977).: Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. Z. Wahr. Geb. 39, 301-313.

[2] MERTENS, J. F. (1972).: Théorie des processus stochastiques généraux applications aux surmartingales. Z. Wahr. Geb. 22, 45-68.

[3] MEYER, P. A. (1966).: Probabilités et potentiel. Ed. Herman. Paris.

[4] NEVEU, J. (1972).: Martingales à temps discret. Ed. Masson et Cie. Paris.