Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

EMV CUANDO SE RESTRINGE EL ESPACIO PARAMETRICO, CASO NORMAL

Bonifacio Salvador González

Dpto. de Estadística
Universidad de Valladolid

Abstract

This paper deals with the problem of the calculation of the maximum likelihood estimate for the parameter $u=(u_1,\ldots,u_p)$ where u_i is the mean of a normal distribution with unknown variance for every $1 \leq i \leq p$, under the assumtion that the true value of the parameter belongs to the region of R^p $k_1u_1 \leq \ldots \leq k_pu_p$ being k_i a positive real number for every $1 \leq i \leq p$.

The problem is reduced to one of regresion which is solved; An algorithm to build the solution is also given.

INTRODUCCION

En BARLOW, BARTHOLOMEW, BREMER y BRUNK, (1.972);se resuelve el problema de calcular el EMV para el parámetro $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_p)$ donde θ_i es el parámetro desconocido de una distribución de la familia exponencial, $i=1,\ldots,p$, cuando se sabe que el verdadero valor del parámetro pertenece a una región del espacio paramétrico, definida mediante relaciones de orden entre los parámetros, reduciendolo al problema de regresión isotónica.

En este trabajo se plantea el problema de calcular el EMV para el parámetro $u=(u_1,\ldots,u_p)$ donde u_i cuando $i=1,\ldots,p$, son las medias desconocidas de poblaciones normales con varianzas conocidas, cuando se sabe que el verdadero valor del parámetro, pertenece a una región de R^p definida por:

$$k_1u_1 \leq k_2u_2 \leq \cdots \leq k_pu_p$$

donde $k_i \in R^+$ $i=1,2,\ldots,p$.

En la primera sección, se reduce el problema a uno de regre sión y en la segunda, se resuelve este, dando un algoritmo para construir la solución, que consiste en una reducción del algoritmo de Theil and Van of Panne para programación cuadrática.

1.-Sean $X_1, X_2, \ldots, X_p$; variables aleatorias independientes con distribución $N(u_i, \sigma_i^2)$ $i=1,\ldots,p$, respectivamente, donde u_i son desconocidas y σ_i^2 conocidas $i=1,\ldots,p$.

Se quiere calcular el EMV para el parámetro $u=(u_1,\ldots,u_p)$ cuando se sabe que el verdadero valor del parámetro, pertenece a la región $\mathcal{R}$ de R^p, definida por: $k_i u_i \leq k_{i+1} u_{i+1}$ $i=1,2,\ldots,p-1$ donde k_i $i=1,\ldots,p$, son números reales positivos dados; para ello se dispone de muestras tomadas de cada población de tamaños n_i $i=1,\ldots,p$ respectivamente. Sean $\overline{X}_i$ $i=1,\ldots,p$ las correspondientes medias muestrales.

TEOREMA 1.1

El EMV $u^*=(u_1^*,\ldots,u_p^*)$ para $u=(u_1,\ldots,u_p)$ cuando se sabe que $u \in \mathcal{R}$, coincide con la solución al problema de:

Minimizar $\sum_{i=1}^{p} (\overline{X}_i - u_i)^2 \, n_i / \sigma_i^2$

sujeto a las restricciones:

$k_i u_i \leq k_{i+1} u_{i+1}$ $\quad i=1,\ldots,p-1$

Demostración

Basta observar que:

$$-2\ln L(X_{11},\ldots,X_{1n_1},\ldots,X_{p1},\ldots,X_{pn_p} / u, \sigma) = 2 \sum_{i=1}^{p} -n_i \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma_i) + \sum_{i=1}^{p} (\sigma_i^2)^{-1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}-\overline{X}_i)^2 + \sum_{i=1}^{p} (\overline{X}_i - u_i)^2 \, n_i / \sigma_i^2$$

y que los dos primeros sumatorios, no dependen de u.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE REGRESION

Sea $X=\{1,2,\ldots,p\}$, dada una aplicación w de X en R^+, dados k_i $i=1,\ldots,p$, números reales positivos, sea $H(k_1,\ldots,k_p) = \{ f$:de X en R / $k_i f(i) \leq k_{i+1} f(i+1)$ $i=1,\ldots,p-1 \}$, a partir de ahora escribiremos f_i en lugar de $f(i)$.

El problema consiste en lo siguiente: Dada una aplicación g de X en R, encontrar la función de la clase $H(k_1,\ldots,k_p)$ que minimice en dicha clase la expresión:

$$\sum_{i=1}^{p} (g_i - f_i)^2 \, w_i$$

El problema puede plantearse tambien en la forma:

Minimizar $\sum_{i=1}^{p}(g_i - f_i)^2 w_i$, sujeto a las p-1 restricciones:
$k_i f_i \leqslant k_{i+1} f_{i+1}$ i=1,...,p-1.

denotaremos por (i) a la i-esima restricción i=1,...,p-1.

DEFINICION 2.1

Diremos que la restricción (i) es ENTRANTE, cuando la solución al problema, que llamaremos g^* , la verifique con la igualdad; es decir $k_i g_i^* = k_{i+1} g_{i+1}^*$

DEFINICION 2.2

Diremos que la función sobre X "f" es realizable cuando $f \in H(k_1,\ldots,k_p)$.

-Representaremos por A_o, el conjunto de restricciones que no verifica la función "g" dada, esto es:

$$(i) \in A_o \quad \text{cuando} \quad k_i g_i > k_{i+1} g_{i+1}$$

-Si A es un conjunto de restricciones, representaremos por i_A el minimo de A y por i^A el maximo de A.

-Diremos que un conjunto de restricciones A es un bloque cuando: $\forall\ j \ /\ i_A \leqslant j \leqslant i^A \Rightarrow (j) \in A$.

DEFINICION 2.3

Sea $A \subset A_o$ un bloque de restricciones; por ARREGLAR las restricciones de A entenderemos obtener la función g^A que minimice la expresión

$$\sum_{i=1}^{p} (g_i - f_i)^2 w_i$$

sujeto a las restricciones $k_i f_i = k_{i+1} f_{i+1} \quad \forall\ (i) \in A$.

PROPOSICION 2.1

La función g^A de la definición 2.3 verifica:

$$g_j^A = g_j \quad \forall\ j \ /\ (j) \notin A,\ j \neq i^A + 1$$

$$g_{i_A}^A \equiv \frac{\sum_{i=i_A}^{i^A+1} (k_{i_A} / k_i)\ g_i w_i}{\sum_{i=i_A}^{i^A+1} (k_{i_A} / k_i)^2\ w_i}$$

$$g_j^A = (k_{i_A} / k_i)\ g_{i_A}^A \quad \forall\ j/\ i_A \leqslant j \leqslant i^A+1$$

Demostración

Es consecuencia inmediata de la definición 2.3

Utilizaremos, para resolver el problema, el algoritmo de

Theil and Van of Panne ; BOOT (1.968), basado en la idea de que al menos una de las restricciones de A_o es entrante. El teorema siguiente nos permite reducir el algoritmo considerablemente, pues nos asegura que todas las restricciones de A_o son entrantes.

TEOREMA 2.1

$$(i) \in A_o \Rightarrow (i) \text{ ENTRANTE}$$

Demostración

Basta con demostrar que $\forall$ A subconjunto propio de A_o; la función g^A no verifica las restricciones de $A_o - A$, y puesto que todo subconjunto de A_o, puede descomponerse en unión de bloques disjuntos, basta demostrar lo anterior cuando A es un bloque; resultado que se desprende de la proposición 2.1.

Algoritmo 1

Dada g; si $A_o=\emptyset$ entonces g es la solución, si $A_o\neq\emptyset$ obtenemos g^{A_o}, si $g^{A_o} \in H(k_1,\ldots,k_p)$ es la solución, en caso contrario sea A_1 el conjunto de restricciones que no verifica g^{A_o}; obtenemos entonces $g^{A_o \cup A_1}$. Si $g^{A_o \cup A_1}$ es realizable, es la solución, en caso contrario se continua este procedimiento hasta encontrar por primera vez una función realizable, que será la solución.

Los teoremas siguientes prueban que, la función construida mediante el Algoritmo 1 es la solución.

TEOREMA 2.2

Si g^* es la función construida mediante el algortmo 1, verifica:

a) $G_i^* \leq G_i \quad \forall i=1,\ldots,p$

b) $G_p^* = G_p$

c) $\forall\, i \,/\, G_i^* < G_i \Rightarrow (i)$ entrante

siendo $G_i^* = \sum_{j=1}^{i} (g_j^* / k_j)\, w_j$ y $G_i = \sum_{j=1}^{i} (g_j / k_j)\, w_j \quad i=1,\ldots,p$

TEOREMA 2.3

Toda función realizable, que verifique las propiedades b) y c) del teorema anterior, es la solución; la solución es única.

Por lo tanto el EMV buscado, coincide con la solución al problema de regresión donde $g_i=\bar{X}_i$ y $w_i= (n_i / \sigma_i^2)$ $i=1,\ldots,p$.

BIBLIOGRAFIA

(1) BARLOW y otros. Statistical Inference under order restrictions Wiley, 1.972

(2) BOOT J.C.G. Programation quadratique. Dunod 1.968.