Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE LA LEY DE LOS GRANDES NUMEROS PARA LA P-ESPERANZA Y SU VARIANZA ASOCIADA

Carlos Matrán Bea

Dpto. de Estadística
Colegio Universitario de Burgos

ABSTRACT: We prove the law of the large numbers in the p th mean for the p-mean (solution of the equation in $k\in R$ $\int|X-k|^p \operatorname{sign}(X-k)\,d\mu = 0$) from the corresponding strong law of the large numbers, making use of the inequality $E_p(|X|)\leq K\|X\|_p$, proved in another article of the author, and also the strong and the (p+1) th mean laws of the large numbers for the p th variance (measurement of dispersion which we associate with the p-mean because of its analogy with the variance).

INTRODUCCION: En un espacio probabilístico (Ω,σ,μ), la p-esperanza de una variable X (p+1)-integrable, siendo $p>0$, la definimos en principio [6], en evidente analogía con la esperanza matemática, como la constante $E_p(X)$ que verifica la condición de mínimo $\|X-E_p(X)\|_{p+1} = \min_{k\in R}\|X-k\|_{p+1}$, ó de forma equivalente, como la constante determinada por la proyección métrica de X sobre $L^{p+1}(\Omega,\alpha_o,\mu)$, siendo α_o la σ-álgebra trivial, haciendo uso de la propiedad de Tchebycheff que los espacios L^r poseen si $r>1$ (Singer [8]). La varianza de orden p, como medida de dispersión asociada a la p-esperanza, la definimos como $\|X-E_p(X)\|_{p+1}^{p+1}$. La caracterización de la p-esperanza como única constante $k\in R$ que para la variable aleatoria X verifica la ecuación $\int|X-k|^p \operatorname{sign}(X-k)\,d\mu = 0$, nos hacía utilizar tal propiedad como nueva definición, válida también, ahora, para variables p-integrables.

En los trabajos [1] y [2] se demuestra la ley fuerte de los grandes números para las "ϕ-medias" y "M-estimadores" respectivamente, que engloban el concepto que aquí manejamos de p-esperanza. Así mismo se estudia el problema de normalidad asintótica. Es el propósito de este trabajo el estudio de las correspondientes leyes de los grandes números para los conceptos descritos, justificándolos en cierto sentido como medidas de centralización y dispersión, demostrándose las convergencias casi seguro y en media de las p-esperanzas y varianzas de orden p muestrales, hacia las correspondientes teóricas.

P-ESPERANZA Y VARIANZA DE ORDEN P MUESTRALES

Dada una muestra aleatoria simple $(X_1,X_2,\dots X_n)$ de una variable aleatoria X, consideremos para cada $\omega\epsilon\Omega$ la realización $(X_1(\omega),X_2(\omega),..X_n(\omega))$ de la muestra, para, a continuación, hallar la p-esperanza de la distribución de probabilidades que a cada $X_i(\omega)$ $i=1,2,..n$ le asocia probabilidad $1/n$; debe verificarse por tanto que para cada $\omega\epsilon\Omega$:

$$1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i(\omega)-E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega)|^p \text{ sign } (X_i(\omega)-E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega))] = 0$$

siendo $E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega)$ la p-esperanza de dicha distribución para cada $\omega\epsilon\Omega$. Daremos en consecuencia la siguiente definición.

Definición.1.1.: Sea $(X_1,X_2,..X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria real X en el espacio (Ω,a,μ). Llamaremos p-esperanza muestral (de tamaño n) de X, siendo $p>0$, a la variable aleatoria $E_p(X_1,X_2,..X_n)$ definida por: $E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega) = h \iff 1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i(\omega)-h|^p\text{sign}(X_i(\omega)-h)] = 0$

De forma obvia podemos definir ahora la medida de dispersión empírica correspondiente, que evidentemente va a ser también una variable aleatoria real.

Definición.1.2.: Llamaremos varianza de orden p muestral (de tamaño n) de una variable X, y la representaremos por $\Sigma_p(X_1,X_2,..X_n)$, a la variable aleatoria $\Sigma_p(X_1,X_2,..X_n) = 1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i - E_p(X_1,X_2,..X_n)|^{p+1}]$ siendo $(X_1,X_2,..X_n)$ una muestra aleatoria simple de X, y $E_p(X_1,X_2,..X_n)$ la p-esperanza muestral.

Cabe mencionar el resultado siguiente, que nos permitirá asegurar la convergencia en media de orden p de las p-esperanzas empíricas a partir de la casi seguro.

Proposición.1.3.: Si $X\epsilon L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ $(p>0)$, la p-esperanza muestral es equi-integrable de orden p (esto es: $\lim_{\mu(A)\to 0}(\sup_{n\epsilon N}\int_A|E_p(X_1,X_2,..X_n)|^p\,d\mu = 0)$.

Demostración: Puesto que para cada $\omega\epsilon\Omega$, $E_p(X_1,..X_n)(\omega)$ es la p-esperanza de una variable con distribución uniforme en el conjunto $[X_1(\omega),...X_n(\omega)]$, utilizando la desigualdad $E_p(|X|) \leq K\|X\|_p$ siendo $K = 3^{1/p}$ si $0<p\leq 1$ y $K = (1+2^{1/p})$ si $1\leq p<\infty$, así como la $|E_p(X)| \leq E_p(|X|)$ válida para todo $p>0$, obtenidas en [6], podemos escribir:

$$|E_p(X_1,..X_n)(\omega)|^p \leq [E_p(|X_1|,|X_2|,...|X_n|)(\omega)]^p \leq K^p[1/n(\sum_{i=1}^{n}|X_i(\omega)|^p)]$$

y en consecuencia para todo $A\epsilon\sigma$:

$$\int_A|E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega)|^p d\mu(\omega) \leq K^p/n[\sum_{i=1}^{n}\int_A|X_i(\omega)|^p\,d\mu(\omega)] = K^p\int_A|X|^p d\mu$$

En fin, puesto que $X\epsilon L^p$, si $\mu(A)\to 0$, tenemos como pretendiamos:

$$0 \leq \sup_{n\epsilon N}\int_A|E_p(X_1,X_2,...X_n)|^p d\mu \leq K^p\int_A|X|^p d\mu \longrightarrow 0$$

Corolario.1.4.: Si $X\epsilon L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ $(p>0)$, la p-esperanza muestral verifica la desigualdad $\|E_p(X_1,X_2,..X_n)\|_p \leq K\|X\|_p$ (siendo K la constante determinada en la proposición anterior).

LEYES DE LOS GRANDES NUMEROS PARA LA P-ESPERANZA Y LA VARIANZA DE ORDEN P

El siguiente teorema, demostrado en [1] y [2] constituye la ley fuerte de los grandes números para la p-esperanza:

Teorema.2.1.: Sea $X\epsilon L^p(\Omega,\sigma,\mu)$ $(p>0)$. La sucesión de p-esperanzas muestrales converge casi seguro hacia la p-esperanza de X.

Demostración: Sea $\xi>0$. Por la ley fuerte de los grandes números se dan las convergencias:

$$1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i-E_p(X)-\xi|^p\text{sign}(X_i-E_p(X)-\xi)] \xrightarrow{c.s.} \int|X-E_p(X)-\xi|^p\text{sign}(X-E_p(X)-\xi)d\mu$$
$$1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i-E_p(X)+\xi|^p\text{sign}(X_i-E_p(X)+\xi)] \xrightarrow{c.s.} \int|X-E_p(X)+\xi|^p\text{sign}(X-E_p(X)+\xi)d\mu$$

siendo el primer límite positivo y el segundo negativo por definición de p-esperanza y el carácter estrictamente decreciente de la función de $a\epsilon R$: $\Phi_X(a) = \int|X-a|^p\text{sign}(X-a)d\mu$. En consecuencia obtenemos la existencia de un N_o a partir del cual $1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i-E_p(X)-\xi|^p\,\text{sign}(X_i-E_p(X)-\xi)] > 0 >$
$> 1/n[\sum_{i=1}^{n}|X_i-E_p(X)+\xi|^p\,\text{sign}(X_i-E_p(X)+\xi)]$ (ambas desigualdades casi seguro) y por tanto que $\forall n \geq N_o$ $E_p(X_1,X_2,...X_n)\in(E_p(X)-\xi,E_p(X)+\xi)$ casi seguro, con lo que la convergencia queda asegurada.

Corolario.2.2.: La convergencia expresada en el teorema anterior también se dá en media de orden p.

Demostración: Por la proposición 1.3 la sucesión de p-esperanzas muestrales es equi-integrable de orden p, y esto junto a la convergencia en probabilidad, y a fortiori con la convergencia casi seguro demostrada en el teorema anterior, basta para asegurar la convergencia en media de orden p.

El siguiente sencillo lema simplificará la demostración que damos de la convergencia casi seguro de la sucesión de varianzas de orden p empíricas.

Lema.2.3.: Sean $(f_n)_{n\epsilon N}$ una sucesión de funciones que converge hacia otra f (f_n,f: R $\longrightarrow$R), y $(a_n)_{n\epsilon N}$ una sucesión de valores reales convergente a un valor a_o. Si la familia $(f_n)_{n\epsilon N}$ es equicontinua, entonces la sucesión $(f_n(a_n))$ converge a $f(a_o)$.

Teorema.2.4.: Sea $X\epsilon L^{p+1}(\Omega,\sigma,\mu)$ (p>0). La varianza empírica de orden p converge casi seguro hacia la teórica.

Demostración: De la ley fuerte de los grandes números obtenemos

$H_n(a,\omega)=[1/n\sum_{i=i}^{n}|X_i(\omega)-a|^{p+1}]^{1/(p+1)} \longrightarrow H(a)=[\int|X-a|^{p+1}d\mu]^{1/(p+1)}$

para casi todo $\omega\epsilon\Omega$. De las definiciones de varianzas empírica y teórica de orden p se deduce que $H_n(E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega),\omega)=[\Sigma_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega)]^{1/(p+1)}$ para todo $\omega\epsilon\Omega$, y $H(E_p(X)) = [\Sigma_p(X)]^{1/(p+1)}$.

Por el teorema 2.1 $E_p(X_1,X_2,..X_n) \longrightarrow E_p(X)$ casi seguro, luego por el lema 2.3, si probamos la equicontinuidad de la familia $(H_n(a,\omega))_{n\epsilon N}$ para todo $\omega\epsilon\Omega$, quedará probado que $[\Sigma_p(X_1,..X_n)(\omega)]^{1/(p+1)} \longrightarrow [\Sigma_p(X)]^{1/(p+1)}$ para casi todo ω, y en consecuencia que $\Sigma_p(X_1,X_2,..X_n) \longrightarrow \Sigma_p(X)$ c.s., pero la equicontinuidad es consecuencia inmediata de la desigualdad:

$$|H_n(a,\omega)-H_n(b,\omega)| = \left|[\int|t-a|^{p+1}dF_n(t,\omega)]^{1/(p+1)}-[\int|t-b|^{p+1}dF_n(t,\omega)]^{1/(p+1)}\right| \leq$$
$$\leq [\int|a-b|^{p+1}dF_n(t,\omega)]^{1/(p+1)}=|a-b| \quad \forall n\epsilon N \quad \forall\omega\epsilon\Omega$$

Corolario.2.5.: La convergencia expresada en el teorema anterior también se dá en media de orden p+1.

Demostración: Por la propiedad de mínimo que tiene la p-esperanza respecto de la $\| \quad \|_{p+1}$: $\|X-E_p(X)\|_{p+1} \leq \|X-a\|_{p+1} \quad \forall a\in R$ obtenemos:

$$1/n\left[\sum_{i=1}^{n} |X_i(\omega)-E_p(X_1,X_2,..X_n)(\omega)|^{p+1}\right] \leq 1/n\sum_{i=1}^{n} |X_i(\omega)-E_p(X)|^{p+1} \; \forall\omega\in\Omega \implies$$

$$\implies 1/n\sum_{i=1}^{n} \int_A |X_i(\omega)-E_p(X_1,..X_n)(\omega)|^{p+1} d\mu \leq 1/n\sum_{i=1}^{n} \int_A |X_i(\omega)-E_p(X)|^{p+1} d\mu =$$

$$= \int_A |X(\omega)-E_p(X)|^{p+1} d\mu \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \mu(A) \longrightarrow 0$$, luego la sucesión es (p+1)-equi-integrable, y la convergencia en media de orden p+1 es consecuencia de la convergencia casi seguro.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. K. BRØNS, H. D. BRUNK, W. E. FRANCK, D. L. HANSON (1969). Generalized means and associated families of distributions. Ann Math Statist 40. 339-355

[2] P. J. HUBER (1964). Robust estimation of a location parameter. Ann Math Statist 35. 73-101

[3] M. LOEVE (1963). Probability theory. D. Van Nostrand

[4] C.-M. MARLE (1974). Mesures et probabilités. Hermann

[5] C. MATRAN (1980). Una generalización de la esperanza condicionada (Proyecciones de variables aleatorias en espacios L^p)

[6] C. MATRAN (1980). Algunos resultados sobre la p-esperanza (Medidas de centralización intrínsecas en espacios L^p)

[7] J. NEVEU (1970). Bases mathematiques du calcul des probabilités. Masson

[8] I. SINGER (1970). Best-approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Springer Verlag