Pub. Mat. UAB
N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

PROCESSOS ESTACIONARIS INDEXATS PER UN GRUP LOCALMENT COMPACTE I ABELIÀ

Lupe Gómez

Dep. d'Estadística Matemàtica
Universitat de Barcelona

Abstract;

In this paper we study the stationary stochastic processes on discrete locally compact abelian groups.

We obtain necessary and sufficient conditions for the regularity and singularity of a process with respect to the complement of finite subsets of the group, by using the integrability of the spectral density. To find these results, stronger than those obtained by L. Bruckner [4], we use a generalization of the method set up by Yu.A. Rozanov [3] for the case Z^n.

PRELIMINARS:

Sigui G un grup L.C.A. (localment compacte i abelià) i Γ el grup dual de G. Γ és també un grup L.C.A. amb la topología de la convergència uniforme sobre els compactes. Representem els caracters de G per $< g,x >$, $g\in G$, $x\in\Gamma$, i anomenem $\mathcal{G}$ la σ-àlgebra dels borelians de Γ.

Sigui $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espai de probabilitats. Considerem el proces $(X_g)_{g\in G}$ a valors reals o complexos. Suposarem que el procés és centrat $E(X_g) = 0$ $\forall g\in G$, i que és de quadrat integrable $X_g \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Definició I: $(X_g)_{g\in G}$ és un <u>procés estacionari en sentit ampli</u> si, i només si, la funció de covariança del procés K és invariant per traslacions; es a dir, si, i només si, $K(g,g')= K(g+h,g'+h)$ $\forall g,g',h \in G$.

Anomenem μ a la <u>mesura espectral</u> del procés, que existeix pel teorema de Bochner i és tal que

$$K(g) = \int_\Gamma < g,x >\mu(dx) \quad \forall g \in G.$$

L'aplicació $\Psi : L^2(\Gamma, \mathcal{G}, \mu) \to H(X) = L^2\{X_g;\ g\varepsilon G\}$ tal que $\Psi(\langle g,.\rangle) = X_g$ és una isometria lineal que dóna la <u>representació espectral del procés</u> X_g per a una mesura ortogonal Z en la σ-àlgebra $\mathcal{G}_\Gamma$ d'intensitat μ ; és a dir $X_g = \int_\Gamma \langle g,x\rangle d\, Z_x$.

Sigui I una família de borelians no buits de G, invariant per traslació ; és a dir , si $A \,\varepsilon I$ aleshores $A+g \varepsilon I$ $\forall g\ \varepsilon G$.

Definició II: Un procés $(X_g)_{g\varepsilon G}$ és <u>I-singular o determinista respecte I</u> si,i només si, $\bigcap_{A\varepsilon I} H(X;A) = H(X)$.

On $H(X;A) = L^2\{X_g;g\varepsilon A\}$, $\forall A\ \varepsilon I$.

Definició III: Un procés $(X_g)_{g\varepsilon G}$ és <u>I-regular o purament no determinista respecte I</u> si ,i només si, $\bigcap_{A\ \varepsilon I} H(X;A) = \{0\}$

REGULARITAT I SINGULARITAT RESPECTE I_∞ .

Suposem que G és discret i numerable.

Considerem la família $I_\infty = \{A/G-A=\{go,\dots,g_n\}\}$dels complementaris dels subconjunts finits de G.

Anomenem $T_n = \{g_o,\dots,g_n\}$ i Δ_{T_n} al complementari ortogonal de $H(\{g_o,\dots,g_n\}^c)$ en $H(X)$; és a dir , $H(X) = H(\{g_o,\dots,g_n\}^c) \oplus \Delta_{T_n}$.

<u>Teorema</u>: X_g és I_∞ -regular si, i només si, la mesura espectral μ de X_g és absolutament contínua respecte la mesura de Haar h amb densitat f(x) i existeix un polinomi trigonometric $\delta(x)$ diferent de zero sobre Γ de la forma

$$\delta(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \langle g_k,x\rangle$$

tal que $\int_\Gamma |\delta(x)|^2 \frac{1}{f(x)}\, dx < \infty$.

Demostració:

Sigui $X_g\ \varepsilon H(\{g_o,\dots,g_n\}^c)$ i $Y\ \varepsilon \Delta_{T_n}$. En virtud de la isometría Ψ , les variables X_g i Y tenen associades les funcions $\langle g,.\rangle$ i φ de $L^2(\Gamma, \mathcal{G}, \mu)$ respectivament.

De l'ortogonalitat entre X_g i Y, deduïm que $\varphi(x)\,\mu(dx)$ és absolutament contínua respecte h i té per densitat

$$\delta(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \langle g_k, x\rangle .$$

Suposem que X_g és I_∞-regular; és a dir, $\lim_{n\to\infty} \Delta_{T_n} = H(X)$. Utilitzant aquesta condició i l'esmentada isometría Ψ^n podem aproximar tota funció φ de $L^2(\Gamma, \mathcal{G}, \mu)$ per funcions φ_n de $L^2(\Gamma, \mathcal{G}, \mu)$ tals que $\varphi_n(x)\,\mu(dx)$ són absoluatment contínues respecte h i tenen per densitat un polinomi $\delta_n(x)$ en $\langle g_k, x\rangle$.

D'ací que si per un $A\in\mathcal{G}$ fix suposem $h(A)=0$, aleshores tenim

$$\mu(A)=\int_A 1.\mu(dx)=\lim_{n\to\infty}\int_A \varphi_n(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_A \delta_n(x)dx = 0 ,$$

i per tant μ és absolutament contínua respecte la mesura de Haar h i té una densitat f(x).

Tornem a suposar ara que X_g és I_∞- regular(només ens caldría que fós I_∞-no singular), aleshores existeix $g_0 \notin \{g_0,\ldots,g_n\}^c$ tal que $X_{g_0} \notin H(\{g_0,\ldots,g_n\}^c)$ i per tant podem escriure

$X_{g_0} = X'_g + Y$, on $Y\in\Delta_{T_n}$, $Y \neq 0$ i $X'_g \in H(\{g_0\ldots g_n\}^c)$.

Siguin q' i φ les funcions de $L^2(\Gamma, \mathcal{G}, \mu)$ associades respectivament a X'_g i Y per la isometría Ψ, i sigui $\delta(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \langle g_k, x\rangle)$ la densitat corresponent a $\varphi(x)\mu(dx)$.

El polinomi trigonomètric $\delta(x)$ sobre Γ és diferent de zero (ja que $c_0 = \|\varphi(x)\|^2_{L^2(\mu)} \neq 0$ perquè $Y \neq 0$) i satisfà

$$\int_\Gamma |\delta(x)|^2 \frac{1}{f(x)}\,dx = \int_\Gamma |\varphi(x)|^2 f(x)dx = \|\varphi(x)\|^2 < \infty .$$

Recíprocament. Definim la funció $\varphi(x)=\dfrac{\delta(x)}{f(x)}$. Trivialment $\varphi \in L^2(\Gamma, \mathcal{G}, \mu)$.

Sigui $Y\in H(x)$ la variable associada a φ per Ψ. Aleshores $\forall g \notin \{g_0,\ldots,g_n\}$, $\langle Y, X_g\rangle = \langle \varphi, \langle g,.\rangle\rangle = 0$, i per tant $Y \in \Delta_{T_n}$, d'on deduïm que $H(X) \neq H(\{g_0,\ldots,g_n\}^c)$ i conseqüentment X_g és I_∞-no singular.

Suposem que X_g admet una descomposició de Wold $X_g = X_g^1 + X_g^2$ en una part singular X_g^1 i una part regular X_g^2.

Considerem la descomposició $Y = Y^1 + Y^2$ de $Y \in \Delta_{T_n}$ en la suma directa $H(X)=H(X^1) \oplus H(X^2)$.

Aleshores $Y = Y^1+Y^2 = \int_\Gamma \psi(x)dZ_{X^1} + \int_\Gamma \psi(x)dZ_{X^2}$.

Com que $H(X;A)=H(X^1;A)\oplus H(X^2;A)$ $\forall A \subset G$, A^c finit, tenim per l'associativitat de la suma directa que $H(X;A)^\perp = H(X^1;A)^\perp \oplus H(X^2;A)^\perp$.

i per tant $\Delta_{T_n} = \Delta^1_{T_n} \oplus \Delta^2_{T_n}$.

Es veu, doncs, per últim que $Y^1 \in \Delta^1_{T_n}$ i $Y^2 \in \Delta^2_{T_n}$ i $Y^1 \neq 0$ (ja que $Y \in \Delta_{T_n}$ i $Y^2 \in H(X^2)$ i $\psi \neq 0$), i per tant $\Delta^1_{T_n} \neq \{0\}$. Això ens implica que X^1_g és I_∞-no singular. Contradicció de la qual es segueix que X_g és I_∞-regular.

Corol.lari.: Sigui $(X_g)_{g\in G}$ un procés estacionari, i sigui μ la mesura espectral de X_g. Anomenem f la densitat espectral corresponent a la part absolutament contínua de μ .

Aleshores X_g és I_∞-singular si, i només si, per tot polinomi trigonomètric $\delta(x)$ diferent de zero sobre Γ tenim que

$$|\delta(x)|^2 / f(x) \notin L^1(\Gamma).$$

REFERÈNCIES

[1] . Rudin, Walter. (1962). Fourier Analysis on Groups. Interscience Publishers.

[2] . Rozanov, Yu.A. (1967). Stationary Random Processes. Holden-Day.

[3] . Rozanov, Yu.A. (1967). On Gaussian Fields with given conditional distributions. Theory of probability and its applications, XII,n°3,381-391.

[4] . Bruckner,L.A. (1969). Interpolation of homogeneous random fields on discrete groups. Ann.Math.Stat.40, 251-258.

[5] . Bruckner,L.A. (1971). Moving averages of homogeneous random fields. Ann.Math.Stat.42, 2147-2149.