Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

TEOREMAS DE CONVERGENCIA PARA UNA CIERTA MEDIDA DE CENTRALIZACION

Juan-Antonio Cuesta Albertos

Colegio Universitario de Burgos

Abstract

Let X be a real random variable of finite variance, μ the probability which induces and d the usual distance in $\mathbb{R}$. It is know that there exists a pair of real numbers in which the minimum of $\int d^2[x;\{P_0,P_1\}]d\mu(x)$ is reached, but not necessarily does it have to be only one. We take any of these pairs as a measure of centralization for X. Given a sequence of real random variables convergent in mean of second order, we obtain several results about of convergence of their measures of centralization in accordance with the differents hypothesis about the variable limit.

1. Introducción.-

Sea X una variable aleatoria real de varianza finita (v. a. v. f.) μ la medida que induce y d la distancia usual en $\mathbb{R}$. Consideremos la función definida en $\mathbb{R}^2$:

$$(1) \qquad D_X(P_0,P_1) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2[x;\{P_0,P_1\}]d\mu(x)$$

Podemos tomar como medida de centralización de X un par en el que se alcance el mínimo de (1). Es conocido que este par existe [1].

El objeto de este trabajo, es estudiar el siguiente problema: Dada una sucesión de v. a. v. f. que converge en media de orden dos a una variable X ¿Qué se puede garantizar acerca de la convergencia de los pares en los que se alcanza el mínimo de (1) para las variables de la sucesión?

A continuación, exponemos, brevemente, la notación empleada y al tiempo, un resumen de los resultados de [1] que utilizamos como base.

Sea $h \in \mathbb{R}$, consideremos la σ-álgebra $\sigma_h = \{\emptyset; \mathbb{R}; (-\infty,h); [h,\infty)\}$; el espacio probabilístico $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu)$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel usual en $\mathbb{R}$, y en él definidas las variables identidad, I, y $g_{X,h} = E[I/\sigma_h]$. Es cierta la igualdad:

$$(2) \qquad E[(I-g_{X,h})^2] = E[I^2] - E[g_{X,h}^2];\ \forall h \in \mathbb{R}$$

Representaremos por $a_X(h)$ y $b_X(h)$, los valores que $g_{X,h}$ toma en los intervalos $(-\infty,h)$ y $[h,\infty)$ respectivamente. Si la probabilidad de alguno de ellos es cero, definimos en él $g_{X,h} = E(X)$.

El mínimo de (2), existe. $L(X)$ es el conjunto de los puntos en que se alcanza. Si $h \in L(X)$, el mínimo de (1) está en el par $(a_X(h);b_X(h))$.

Análogamente, para todo real h, podemos definir la σ-álgebra $\sigma'_h = \{\emptyset;\mathbb{R};(-\infty,h];(h,\infty)\}$ y la v. a. $g'_{X,h} = E[I/\sigma'_h]$. Representamos por $a'_X(h)$ y $b'_X(h)$ los valores que $g'_{X,h}$ toma en los intervalos $(-\infty,h]$ y (h,∞) respectivamente y por $L'(X)$ al conjunto en que se alcanza el mínimo de $E[I^2] - E[g'^2_{X,h}]$ Que también existe y goza de propiedades análogas al de (2).

2. Teoremas de convergencia.-

Proposición 2.1 Sea $[X_n]$ una sucesión de v. a. v. f. centradas, que converge en media de orden dos a una v. a. X que no es constante casi seguro (c.s.)

Existe una subsucesión, a la que representaremos con la misma notación que a la inicial, convergente c. s. a X, tal que el conjunto $L = \cup L(X_n)$ está acotado, y existe una sucesión reales $[p_n]$, cumpliendo:

$$(3) \qquad \lim E_n[g_{n,p_n}^2] = \sup_h E_X[g_h^2]$$

donde $E_n[-]$ representa la esperanza de la v. a. que figura en el interior, calculada según la probabilidad que induce X_n; $E_X[\cdot]$ lo mismo con respecto de X; g_{n,p_n} es la variable g_{X_n,p_n} y g_h la $g_{X,h}$.

DEMOSTRACION.- Sea $h \in L(X)$. Existe una sucesión $[p_n]$ convergiendo a h, contenida en el conjunto de continuidad de la distribución de X, tal que:

$$E_X[g_{p_n}^2] \longrightarrow E_X[g_h^2]$$

Existe una subsucesión de la de variables que converge c. s. a X y una de $[p_n]$ que cumplen (3).

Con la desigualdad de Schwartz, se prueba que $L(X)$ está acotado. Basado en ésto, en (3) y en las propiedades de $[p_n]$ se demuestra que $L = \cup L(X_n)$, para esta subsucesión de variables está acotado.

En lo sucesivo, utilizaremos la notación introducida en la proposición precedente.

Sea X una v. a. v. f., F su función de distribución, h un número real y supongamos que existe k perteneciente al intervalo abierto de extremos F(h) y F(h+). Evidentemente k no es cero ni uno. Definimos:

$$A(k) = \frac{\int_{-\infty}^{+h} x dF(x) + h[k-F(h)]}{k} \; ; \; y \; B(k) = \frac{\int_{+h}^{\infty} x dF(x) + h[F(h+)-k]}{1-k}$$

el símbolo "+" indica que h queda excluido del conjunto de integración.

Teorema 2.2 Sea $[X_n]$ una sucesión de v. a. v. f. que converge en media cuadrática a una v. a. X que no es constante c. s. Sea $[h_n]$ una sucesión tal que $h_n \in L(X_n)$. Entonces, existe una subsucesión $[h_{n_m}]$ convergente. Sea h su límite

a/ Si F es continua en h; $h \in L(X)$ y

$$a_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow a(h) \text{ y } b_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow b(h)$$

b/ Si F no es continua en h, puede suceder:

i/ $h \in L(X)$; $a_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow a(h)$ y $b_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow b(h)$

ii/ $h \in L'(X)$; $a_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow a'(h)$ y $b_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow b'(h)$

iii/ Existe $k \in (F(h);F(h+))$, tal que $F_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow k$;

$$a_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow A(k); \; b_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow B(k) \text{ y}$$

$$[A(k)]^2 k + [B(k)]^2 (1-k) = \sup_h E_X[g_h^2]$$

DEMOSTRACION.- Aplicando la proposición 2.1 es claro que se puede extraer una subsucesión de $[h_n]$ convergente. Sea h el límite. Existe una subsucesión de la que tenemos y $k \in [F(h);F(h+)]$, tal que $F_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow k$.

Con las propiedades de la subsucesión, la desigualdad de Schwartz el teorema de L_r-convergencia ([2], p. 163) y el de la convergencia mayorada, se demuestra este teorema para variables centradas. De aquí, con el teorema 3.8 de [1], se demuestra en general.

De este teorema se deducen los siguientes corolarios:

Corolario 2.3 Bajo las hipótesis del teorema 2.2, si $L(X) \cup L'(X) = \{h\}$; la sucesión original $[h_n]$ converge a h y existe una subsucesión de la de variables que cumple el resto de las conclusiones del citado teorema.

Corolario 2.4 En las hipótesis del corolario anterior, si la distribución de X es continua en h, las sucesiones originales cumplen:

$$a_n(h_n) \longrightarrow a(h) \text{ y } b_n(h_n) \longrightarrow b(h)$$

Corolario 2.5 Si se cumplen las hipótesis del teorema 2.2; la sucesión original cumple que:

$$E_n[g^2_{n,h_n}] \longrightarrow \sup_h E_X[g^2_h]$$

Teorema 2.6 Sea $[X_n]$ una sucesión de v.a. v. f. que converge en media cuadrática a una v. a. X constante c. s. igual a k. Sea $[h_n]$ una sucesión tal que $h_n \in L(X_n)$. Existe una subsucesión tal que:

$$a_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow k; \text{ o bien } b_{n_m}(h_{n_m}) \longrightarrow k.$$

3. Comentarios.-

En todos los resultados que figuran, se ha tomado como hipótesis una sucesión $[h_n]$ tal que $h_n \in L(X_n)$. Evidentemente esto no es necesario y puede ser sutituido por una sucesión tal que $h_n \in L(X_n) \cup L'(X_n)$. No obstante, el hacerlo así, hubiera originado una mayor complicación en los enunciados y demostraciones de los teoremas, lo que aconsejó tomar como hipótesis de partida la que figura.

Queremos indicar que la convergencia casi seguro, no es suficiente para garantizar ningún resultado acerca de posibles convergencias de los valores en los que se alcanza el mínimo de (2).

Por último, comunicar que disponemos de contraejemplos con los que se pone de manifiesto la imposibilidad de (sin reforzar las hipótesis, salvo en el sentido mencionado en este mismo apartado) precisar más las conclusiones de los teoremas que se incluyen. También hemos encontrado un ejemplo de sucesión de v. a. v. f. convergente en media cuadrática a una v. a. X y $h \in L(X)$, tal que ninguna sucesión $[h_n]$ con $h_n \in L(X_n) \cup L'(X_n)$ ni subsucesión de una de éstas converge a h.

BIBLIOGRAFIA.-

[1] J. A. Cuesta - Una medida de centralización para variables aleatorias

[2] M. Loève - Probability Theory - D. Van Nostrand Comp. 1960