Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

UNA CARACTERIZACION DE ESPACIO DE TIPO p EN TERMINOS DE VARIABLES ALEATORIAS REALES

Clemente A. Campos y Sáez, Miguel San Miguel Marco

Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad de Zaragoza

Abstract.- The paper contains a characterization of a Banach space of type p, $1<p\leq 2$, expresed in terms of a sequence of random variables in $L^p(\mathbb{R})$ which is conditionally independent. When $p=2$, we also obtain a well known result of Kwapien and its reciprocal.

Sea $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio probabilístico, $(B,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable real y B^* el dual topológico de B.

Si (x_n) es base de B y (m_n) una sucesión creciente de enteros positivos , $m_0=0$, denotemos

$$y_n=\sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} a_j x_j , y_n\neq 0, \ (n=1,2,...)$$

donde (a_n) es una sucesión de números reales. En estas condiciones se demuestra que (y_n) es necesariamente una sucesión básica llamada sucesión básica de bloque respecto a la base considerada (x_n).

Definición 1.- Sean B_1 y B_2 dos espacios de Banach; dos sucesiones $(x_n)\subset B_1$ e $(y_n)\subset B_2$ se llaman equivalentes si para cualquier sucesión de números reales (a_n) se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

Como punto de partida para llegar a obtener una condición necesaria y suficiente para que el espacio B sea de tipo p, se utiliza el siguiente resultado cuya demostración puede hallarse en Singer[4] ó en Marti[3].

Proposición 2.-(Bessaga, Pelczynski). Sea (x_n) base de un espacio de Banach B y $(f_n) \subset B^*$ la sucesión asociada de funcionales coordenados. Si una sucesión $(y_n) \subset B$ verifica

$$(1) \qquad \inf_n \| y_n \| = \varepsilon > 0$$
$$\lim_n f_i(y_n) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots),$$

existen sucesiones de enteros positivos crecientes (p_n) y (q_n) de modo que la subsucesión (y_{p_n+1}) de (y_n) es una sucesión básica equivalente a una sucesión (z_n) básica de bloque respecto a (x_n) definida mediante

$$(2) \qquad z_n = \sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}} f_i(y_{p_n+1}) x_i \qquad (n=1,2,\ldots)$$

y además

$$(3) \qquad \| z_n - y_{p_n+1} \| < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} \qquad (n=1,2,\ldots). \quad \blacksquare$$

Aplicaremos esta proposición considerando el espacio de Banach $L^p(\mathbb{R})$, donde p cumple $1<p\leq 2$. Sea pues (ξ_n) una sucesión de variables aleatorias reales que constituyen una base incondicional de un subespacio H de $L^p(\mathbb{R})$ y designemos mediante (ξ_n^*) a la sucesión asociada de funcionales coordenados. Sea (ε_n) una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli, es decir, $P(\varepsilon_n=-1)= P(\varepsilon_n=1)= 1/2$, $n=1,2,\ldots$, tales que el subespacio vectorial cerrado $[\varepsilon_n]$ esté contenido en H.

Claramente se verifica

$$(4) \qquad \inf_n \|\varepsilon_n\|_p = 1.$$

Lema 3.- Cualquiera que sea la base considerada, (ξ_n) del subespacio $H \subset L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leq 2$, se tiene

$$(5) \qquad \lim_n \xi_i^*(\varepsilon_n) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Demostración.- Para cada i, sea η_i el elemento de $L^q(\mathbb{R})$,

$p^{-1}+q^{-1}=1$, correspondiente a ξ_i^*, de modo que

$$(6)\qquad \xi_i^*(\xi)=\int_\Omega \eta_i(\omega)\xi(\omega)P(d\omega) \qquad (i=1,2,\ldots)$$

para todo $\xi\in L^p(\mathbb{R})$. Puesto que $\eta_i\in L^2(\mathbb{R})$, $i=1,2,\ldots$, puede descomponerse de un modo único de la forma siguiente

$$\eta_i=\eta_i^1+\eta_i^2$$

donde $\eta_i^1\in[\varepsilon_n]$ y $\eta_i^2\in[\varepsilon_n]^\perp$, complemento ortogonal de $[\varepsilon_n]$ en $L^2(\mathbb{R})$. Ahora bien, el producto escalar en $L^2(\mathbb{R})$

$$\langle\eta_i,\varepsilon_n\rangle=\int_\Omega \eta_i\,\varepsilon_n dP \qquad (i=1,2,\ldots)$$

cualquiera que sea n verifica

$$\langle\eta_i,\varepsilon_n\rangle=\langle\eta_i^1,\varepsilon_n\rangle$$

y como (ε_n) es una sucesión básica ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, puede escribirse

$$\lim_n\langle\eta_i^1,\varepsilon_n\rangle=0$$

y por tanto

$$\lim_n\int_\Omega \eta_i\,\varepsilon_n dP=0 \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Basta finalmente considerar (6) para deducir la validez del lema 3. ∎

Por aplicación de la proposición 2 se deduce que existe (ε_{p_n+1}), subsucesión de (ε_n), y (θ_n) definida por

$$(7)\qquad \theta_n=\sum_{i=q_n+1}^{q_{n+1}}\xi_i^*(\varepsilon_{p_n+1})\xi_i$$

de modo que

$$(8)\qquad \|\theta_n-\varepsilon_{p_n+1}\|_p<2^{-n-3} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

y además (θ_n) es una sucesión básica incondicional de $H\subset L^p(\mathbb{R})$, si (ξ_n) es base incondicional.

<u>Proposición 4</u>.- Sea B un espacio de Banach, (ξ_n) una base incondicional de $H\subset L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leq 2$, y (ξ_n^*) los funcionales coordenados asociados a la base. Si existe una constante $A>0$ tal que

$$(9)\qquad \sup_j\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|\xi_k^*(\varepsilon_{m_j})|^p<A$$

y existe $C>0$ tal que

$$(10)\qquad E\|\sum_{j=1}^n\xi_j\,x_j\|^p\leq C\sum_{j=1}^n\|x_j\|^p$$

para todo n y cualesquiera que sean $x_1,x_2,\ldots,x_n\in B$, entonces B es un espacio de tipo p.

<u>Demostración</u>.- Supongamos que existe $C>0$ tal que se cumple la desigualdad (10). Para todo n y cualesquiera $x_1,x_2,\ldots,x_n\in B$,

existe una sucesión creciente de enteros (m_j) tal que

$$E\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\|^p = E\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{m_j} x_j\|^p,$$

por (7), también existe una sucesión de enteros(k_j) tal que

$$(11)\quad \|\theta_j\|_p = \Big(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|\xi_k^*(\varepsilon_{m_j})|^p\Big)^{1/p} = 1$$

y, por (8),

$$(12)\quad E|\theta_j-\varepsilon_{m_j}|^p < 2^{-j} \qquad (j=1,2,\dots).$$

Si $p^{-1}+q^{-1}=1$, por aplicación de la desigualdad de Hölder se obtiene

$$(13)\qquad E\|\sum_{j=1}^{n}(\theta_j-\varepsilon_{m_j})x_j\|^p \le \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p.$$

Por otra parte, si se tiene en cuenta (9),

$$(14)\quad E\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\|^p = E\|\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}\xi_k^*(\varepsilon_{m_j})\xi_k\Big)x_j\|^p \le D\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p$$

con D=AÇ.

Finalmente, la desigualdad triangular, junto con (13) y (14), permite escribir:

$$(15)\quad \Big(E\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{m_j}x_j\|^p\Big)^{1/p} \le M\Big(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\Big)^{1/p}$$

donde $M=1+D^{1/p}$. Por tanto el espacio de Banach B es un espacio de tipo p. ∎

<u>Proposición 5</u>.- Sea (ξ_n) una sucesión condicionalmente independiente de variables aleatorias centradas que es base del subespacio $H\subset L^p(\mathbb{R})$, $1<p\le 2$. Supongamos que existe A>0 tal que

$$\sup_j \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|\xi_k^*(\varepsilon_{m_j})|^p < A.$$

Un espacio de Banach B es de tipo p si y sólo si existe una constante C>0 tal que

$$(16)\qquad E\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i\|^p \le C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p$$

para todo n y cualesquiera que sean $x_1,x_2,\dots,x_n\in B$.

La demostración se basa en la proposición 4 para concluir que B es de tipo p. La validez del recíproco se sigue de[1]. ∎

La siguiente caracterización es un corolario de la proposición 4 cuando se considera el caso p=2.

<u>Proposición 6</u>.- Sea (ξ_n) un sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$ y B un espacio de Banach. Una condición necesaria y suficiente para que B sea de tipo 2 es que exista una constante

M>0 tal que

$$E\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\|^2 \leq M\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \tag{17}$$

para todo n y cualesquiera $x_1,x_2,\ldots,x_n\in B$. $\square$

La condición suficiente es un resultado de Kwapien[2] y la condición necesaria puede obtenerse a partir de[1].

Bibliografía.

[1]. Abaurrea,J., Campos,C., San Miguel,M.(1979):"Sobre la independencia condicional en el sentido de Beck". En el volumen Contrib. en Prob y Est. Mat. Ens. de la Mat.y Analisis, pp. 25-32, Universidad de Granada. Granada.

[2]. Kwapien,S.(1972):"Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients". Studia Math.,44, pp. 583-595.

[3]. Marti, J.(1969):"Introduction to the theory of bases". Springer-Verlag. Berlin.

[4]. Singer,I.(1970):"Bases in Banach spaces I".Springer-Verlag. Berlin.