

EL NUCLEO DE LOS POTENCIALES DE BESSEL-CLIFFORD Y ESPACIOS DE LIPSCHITZ

José Rodríguez Expósito

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
 Universidad de La Laguna

Sumario.- Se dan algunas propiedades del núcleo de una clase de potenciales del tipo Bessel de orden α en relación con los espacios de Lipschitz $\Lambda_{\alpha}^{p,q}$.

1. Introducción.- \mathcal{L}_{α}^p denota el espacio de potenciales de orden α de todas las funciones en L^p , relativo a la clase excepcional \mathcal{Q}_0 de conjuntos de medida de Lebesgue cero, es decir, el espacio de funciones u para las que existe una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u(x) = N_{\alpha} * f(x)$ casi por todo. La norma de cada elemento u de este espacio viene definida como la norma del correspondiente $f \in L^p$:

$$\|u\|_{(\alpha), p} = \|f\|_{L^p}$$

Una definición equivalente para \mathcal{L}_{α}^p en el sentido de las distribuciones, es la que \mathcal{L}_{α}^p constituye el espacio de distribuciones temperadas u , cuyo potencial inverso de orden α , $N_{-\alpha} * u$, está en L^p .

El espacio \mathcal{L}_{α}^p , para $p < \infty$, representa igualmente la completación (imperfecta) del conjunto de funciones $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, provisto de la norma:

$$\|u\|_{(\alpha), p} = \|N_{2m-\alpha} * \frac{1}{C_{\alpha, n, m}} (1-r\Delta)^m u\|_{L^p}$$

siendo

$$C_{\alpha, n, m} = \left(\frac{n+\alpha-4}{\alpha-2}\right) \left(\frac{n+\alpha-6}{\alpha-4}\right) \dots \left(\frac{n+\alpha-2(m+1)}{\alpha-2m}\right),$$

y m (entero) $\leq \frac{\alpha}{2}$.

La función $N_\alpha(x)$, constituye el núcleo de los potenciales $u \in \mathcal{L}_\alpha^p$ y viene dada por:

$$N_\alpha(x) = \frac{1}{2^{n-1} \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} L_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)$$

que incluye la función modificada de Bessel-Clifford de tercera especie $L_\nu(x) = x^{-\nu/2} K_\nu(2\sqrt{x})$, la cual es solución de la ecuación diferencial

$$x y'' + (\nu+1) y' - y = 0. \quad (*)$$

El espacio \mathcal{L}_α^p de potenciales de orden α ha sido introducido en un trabajo anterior (***) y está conexionado con otros importantes espacios, en especial con el de potenciales de Bessel estudiado por N. Aronszajn y K.T. Smith. (***).

En este artículo se exponen, algunas propiedades del núcleo N_α en conexión con los espacios $\Lambda_\alpha^{p,q}$ de Lipschitz.

2. Propiedades de N_α .

Proposición 1

"Sea $\alpha > 0$. Se tiene:

$$N_\alpha(x) \in \Lambda_{\frac{1}{2}}^{p, \frac{1}{2}} \left[\alpha - n \left(1 - \frac{2}{p} \right) \right], \quad \text{si } 0 < \frac{\alpha}{2} - \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{p} \right) < 1"$$

En efecto, en virtud de un teorema de caracterización para los espacios de Lipschitz (****), es suficiente comprobar que:

$$\left[\int \left| N_\alpha(x+t) - N_\alpha(x) \right|^p dx \right]^{1/p} \leq A |t|^{\frac{1}{2} \left[\alpha - n \left(1 - \frac{2}{p} \right) \right]},$$

siendo A una constante real positiva. Pero ello sigue de una oportuna descomposición de la integral del primer miembro en sumandos relativos a los entornos del origen y del infinito.

Proposición 2

"Sea $\alpha > 0$. Se tiene:

$$N_\alpha(x) \in \Lambda_{\alpha - n \left(\frac{p-2}{p} \right)}^{p, \infty} \quad \text{si } \alpha - n \left(\frac{p-2}{p} \right) > 0 \text{ y } |x| \geq 1"$$

(*) Vease [2].

(**) En curso de publicación.

(***) Vease [1].

(****) Vease [3], pag. 151, prop. 7'.

En efecto, en la misma línea de la demostración de la proposición anterior, se demuestra que:

$$\left[\int_{|x| \geq |t| \geq 1} |N_\alpha(x+t) - N_\alpha(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq A|t|^{\alpha - (\frac{p-2}{p})}, \text{ si } 0 < \alpha - n(\frac{p-2}{p}) < 1;$$

y en el caso general:

$$\left\| \frac{\partial^{\bar{\alpha}}}{\partial y^{\bar{\alpha}}} N_\alpha(x, y) \right\|_{L^p} \leq M_{\alpha, p} y^{\alpha - n(\frac{p-2}{p}) - \bar{\alpha}} \quad (y > 0),$$

donde $\bar{\alpha}$ representa el menor entero mayor que α , y $N_\alpha(x, y) = P_y * N_\alpha(x)$, siendo P_y el conocido núcleo de Poisson.

Corolario

"Si $\alpha > 0$ y $|x| \geq 1$, se tiene:

$$N_\alpha(x) \in \Lambda_\alpha^{1, \infty}."$$

Proposición 3

"Para $2 \leq p < \infty$, se tiene:

$$\mathcal{L}_2^p(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_1^{p, p}(\mathbb{R}^n)."$$

En efecto, basta ver que:

$$L_1^p \subset \Lambda_1^{p, p} \text{ para } 2 \leq p < \infty \quad (*),$$

y que $\mathcal{L}_2^p \subset L_1^p$ ($1 < p < \infty$).

Proposición 4

"Sea $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Se tiene:

$$N_\beta(\Lambda_\alpha) \subset \Lambda_{\alpha+\beta} \text{ si } |x| \geq 1"$$

Para la demostración, se considera la integral $U(x, y)$ de Poisson de $N_\beta * f$ ($f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$):

$$U = P_y * N_\beta * f$$

(*) Véase [3], pag. 156.

Entonces, si se designa con k el menor entero mayor que α , y si se diferencia l veces ($l > \beta$) respecto de y_1 , l veces respecto de y_2 , ($y = y_1 + y_2$), se infiere:

$$\left\| \frac{\partial^{k+1} u(x, y)}{\partial y^{k+1}} \right\|_{L^\infty} \leq \left\| \frac{\partial^1 N_\beta(x, \frac{y}{2})}{\partial y_1^1} \right\|_{L^1} \left\| \frac{\partial^k u(x, \frac{y}{2})}{\partial y_2^k} \right\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq A' \left(\frac{y}{2}\right)^{-1+\beta} A'' \left(\frac{y}{2}\right)^{-k+\alpha} \leq A y^{-1-k+\alpha+\beta}$$

de donde resulta:

$$N_\beta * f \in \Lambda_{\alpha+\beta}, \text{ y } \|N_\beta * f\|_{\Lambda_{\alpha+\beta}} \leq C \|f\|_{\Lambda_\alpha}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. ARONSZAJN y K.T. SIMTH: "Theory of Bessel Potentials, part. I". Ann. Inst. Fourier, Vol. 11 (1.961), pp. 385-475.
- [2] N. HAYEK: "Estudio de la ecuación diferencial $xy'' + (\nu+1)y' + y = 0$ y de sus aplicaciones". Collectanea Mathematica, Barcelona, (Vol. XVIII), fascs, 1 y 2, 1.966-1.967, pp. 57-114.
- [3] E.M. STEIN: "Singular integrals and differentiability of functions". Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1.970).
- [4] M.H. TABLESON: "On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -spaces, I. Principal properties". J. Math. Mech 13, 407-480 (1.964).