Pub. Mat. UAB
Nº 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

SOLUCIONES HOMOTETICAS QUE EMPALMAN PUNTOS DE EQUILIBRIO

Josefina Casasayas

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Abstract.- We give the dimensions of the stable and unstable manifolds for the equilibrium points of the collision manifold for the planar and spatial n-body problem. For each central configuration s_c there are two equilibrium points S_c^+ and s_c^-. For any value of the energy $h<0$ there is an unique homothetic orbit Γ_h from s_c^+ to s_c^-. We prove that a necessary condition for Γ_h to be a transversal heteroclinic orbit is that the central configuration s_c associated to Γ_h is a non-degenerate minimum of a convenient restriction of the potencial.

Sean $(q_i, p_i) \in \mathbb{R}^{2\nu}$ $i=1\div n$ posición y momento del cuerpo i-ésimo, de masa m_i, siendo $\nu=1,2$ ó 3 según sea el problema rectilíneo , plano o espacial, resp. Las ecuaciones del movimiento son:

(1) $\dot{q} = M^{-1}p$; $\dot{p} = \nabla U(q)$;

donde $q=(q_i)$, $p=(p_i)$, $M=\mathrm{diag}(m_1,\overset{\nu}{\ldots},m_1; \ \ldots \ ;m_n,\overset{\nu}{\ldots},m_n)$,

$$U(q)= \sum_{1\leq i<j\leq n} m_i m_j / \left|q_i-q_j\right| \ , \ T(p)=1/2 \ p^T M^{-1} p.$$

definidas y analíticas en el dominio $(\mathbb{R}^{n\nu}-\Delta)\times\mathbb{R}^{n\nu}$, $\Delta = \bigcup_{i\neq j} \Delta_{ij}$,

$\Delta_{ij} = \{(q_1,\ldots,q_n) \text{ t.q. } q_i=q_j\}$; con integral de energia $T(p)-U(q) = h$.

Las integrales del centro de masas restringen el campo de variaciones de las q´s y las p´s a los subespacios lineales $Q=\{q \text{ t.q.} \sum_1^n m_i q_i=0\}$, $P=\{p \text{ t.q.} \sum_1^n p_i=0\}$ y consideraremos el flujo en QxP

Las colisiones entre dos o más cuerpos provocan singularidades del sistema (1) puesto que las ecuaciones dejan de estar acotadas. Un caso particular es la colisión simultánea de los n cuerpos. McGehee ([2], 1974) da una nueva técnica, mas tarde utilizada por Devaney [1], Simó [4], y Waldvogel [6][7], que permite el estudio de las singularidades debidas a colisión simultánea. Abreviadamente el método de McGehee para n cuerpos y ν= 1,2,3 es el siguiente : consideremos los cambios sucesivos,

$r= (q^T Mq)^{1/2}, \quad s= r^{-1}q, \quad y= p^T s, \quad x=M^{-1}p - ys;$

(2) $v= r^{1/2}y \;, \quad u= r^{1/2}x \;;$

(3) $dt= r^{3/2}d\tau \;, \quad '= d/d\tau.$

que transforman el sistema (1) en,

(4) $r'=rv,\ s'=u,\ v'=1/2\ v^2 + u^T Mu - U(s),\ u'=-1/2\ vu - (u^T Mu)s + U(s)s + M^{-1}\nabla U(s)$;

con integral de energía $1/2\ u^T Mu + 1/2\ v^2 - U(s) = rh.$

Puesto que $r^2= q^T Mq$ y $s^T Ms=1$ este cambio de variables descompone, salvo escalados para velocidad (2) y tiempo (3), la posición (y velocidad) de los cuerpos en una componente sobre el elipsoide del momento de inércia unidad S, s(resp., u), y una componente radial, r(resp., v). El sistema (4) es equivalente a (1) para r>0, estando también definido para r=0 (puntos de colisión simultánea). La variedad invariante por el flujo de (4), $\Lambda= \{(s,v,u)$ t.q. $1/2\ u^T Mu + 1/2\ v^2-U(s)=0\}$ recibe el nombre de <u>variedad de colisión.</u>

Los vectores posición q_i están en <u>configuración central</u> (s_c) si la fuerza que actúa sobre el cuerpo i-ésimo es proporcional a su masa y posición; es decir, si existe $\lambda(q)$ independiente de "i" tal que $\lambda(q)m_i q_i = (\nabla U(q))_i$, i=1÷n. Para cada configuración central, s_c, se obtiene una pareja de puntos de equilibrio para el flujo definido en la variedad de colisión : $s_c^{\pm} = (r=0,\ s=s_c,\ v=\pm\sqrt{2V(s_c)}\ ,\ u=0)$ siendo V el potencial restringido a S; el signo + corresponde a r'>0 (<u>eyección</u>) y el signo - corresponde a r'<0 (<u>colisión</u>).

Se llaman soluciones parabólicas aquellas trayectorias contenidas en la variedad estable o inestable de los puntos de equilibrio y doblemente parabólicas las que empalman dos de estos puntos, Waldvogel [7]. Para soluciones doblemente parabólicas se tiene,

Proposición. Sea $s=s_c$ configuración central. Para cada valor de $h<0$ existe una única solución homográfica (y homotética), Γ_h, con $s\equiv s_c$ que empieza en colapso total (s_c^+) y acaba en colapso total (s_c^-); Γ_h está contenida en la superficie de momento angular cero. El resultado es válido para el problema de n cuerpos y $\nu=1,2,3$.

R.L.Devaney en 1979 demuestra el siguiente teorema,

Teorema.1. Consideremos el problema rectilíneo de n cuerpos. Fijada la energía, las dimensiones de $W^{u,s}(s_c^{\pm})$ son :

	estable	inestable
colisión	n-1	n-2
eyección	n-2	n-1

En este trabajo se da una generalización al caso plano y espacial; se utilizan las siguientes notaciones y resultados : Sean $I_{h,c}$ las variedades integrales del problema de n-cuerpos plano o espacial, es decir, las variedades invariantes por el flujo obtenidas al fijar la energía en "h" y el momento angular en "c". $I_{h,c}$ es invariante por G_c siendo G_c el grupo de isotropía en "c" de la acción adjunta del grupo de Lie G ($G=S^1$ en el problema plano y $G=SO(3)$ en el espacial) y se consideran $I_{h,c}/G_c = \tilde{I}_{h,c}$ ó variedades integrales cociente. En el problema de n cuerpos plano $G_c=S^1$ cualquiera que sea el valor de "c" y en el problema espacial $G_c=S^1$ si $c\neq 0$ y $G_c=SO(3)$ si $c=0$. El paso de $I_{h,c}$ a $\tilde{I}_{h,c}$ se conoce como eliminación del nodo de Jacobi (ref. [5]). Cabe destacar que no es restrictivo para obtener $d(W^{u,s}(s_c^{\pm}))$ que la eliminación del nodo corresponda a hacer cociente por SO(3) solo cuando $c=0$, puesto que dichas variedades estan inmersas en $I_{h,0}$. En el problema plano (espacial) el potencial V definido sobre S induce una función en el cociente S/S^1 $(S/SO(3))$ que designaremos por $\tilde{V}$. Si H es la hessiana de $\tilde{V}$, una configuración central se llama <u>degenerada</u> (<u>no-degenerada</u>) según lo sea $H(s_c)$ y el <u>índice</u>, $ind(s_c)$, es el número de valores propios negativos de $H(s_c)$.

Se obtiene,

<u>Teorema.A.</u> Consideremos el problema de n-cuerpos plano y sea s_c punto crítico no-degenerado de $\tilde{V}$. Las dimensiones de $W^{u,s}(s_c^{\pm})$ restringiendo el flujo en $\tilde{I}_{h,0}$ son,

	estable	inestable
colisión	$2n-3-ind(s_c)$	$2n-4+ind(s_c)$
eyección	$2n-4+ind(s_c)$	$2n-3-ind(s_c)$

$\tilde{I}_{h,0}$ es de dimensión $4n-7$ y el cociente por S^1 corresponde a la eliminación del nodo de Jacobi.

<u>Teorema.B.</u> Consideremos el problema de n-cuerpos espacial y sea s_c punto crítico no-degenerado de $\tilde{V}$. Las dimensiones de $W^{u,s}(s_c^{\pm})$ restringiendo el flujo en $\tilde{I}_{h,0}$ son,

	estable	inestable
colisión	$3n-6-ind(s_c)$	$3n-7+ind(s_c)$
eyección	$3n-7+ind(s_c)$	$3n-6-ind(s_c)$

$\tilde{I}_{h,0}$ es de dimensión $6n-13$ y el cociente por $SO(3)$ corresponde a la eliminación del nodo de Jacobi.

Ambos teoremas junto con los resultados de Palmore ([3] , corolario (3.1)) permiten demostrar,

<u>Teorema.C.</u> Si s_c es configuración central colineal las variedades $W^s(s_c^-)$ y $W^u(s_c^+)$ se mantienen invariantes por paso del problema rectilíneo al plano y espacial de n-cuerpos.

<u>Corolario.D.</u> Para el problema de n-cuerpos plano y espacial no existen soluciones doblemente parabólicas entre puntos de equi-

librio asociados a s_c colineal y a s_c no-colineal ó a dos s_c colineales distintas.

Dos subvariedades V_1 y V_2 de una variedad V se llaman <u>transversas</u> en $x \in V_1 \cap V_2$ si $T_x(V_1) + T_x(V_2) = T_x(V)$ siendo T_x el espacio tangente a la variedad en el punto x. V_1 <u>corta transversalmente</u> a V_2 si V_1 es transversa a V_2 en todo punto $x \in V_1 \cap V_2$ ó $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Respecto al corte transversal de $W^u(s_c^+)$ con $W^s(s_c^-)$ en los puntos de la órbita Γ_h se demuestra,

<u>Teorema.E.</u> Consideremos el problema de n-cuerpos rectilíneo, plano o espacial. Una condición necesaria para que las subvariedades de $\tilde{I}_{h,0}$, $W^u(s_c^+)$ y $W^s(s_c^-)$, se corten transversalmente en la órbita heteroclínica Γ_h, es que s_c sea mínimo no-degenerado del potencial restringido $\tilde{V}$ (entendiendo $\tilde{V}$ igual a V y $\tilde{I}_{h,0}$ igual a I_h en el caso rectilíneo).

La importáncia del conocimiento de órbitas transversas es, por un lado y como se hace notar en |1|, que estas son estructuralmente estables y, por otro lado, si son heteroclínicas el "shift de Bernouilli" permite detectar zonas de inestabilidad a su alrededor. Asimismo tiene interes el conocimiento de soluciones parabólicas; en particular (ver |7| para más detalles), las soluciones doblemente parabólicas se utilizan para una posible extensión Eanston.

<u>Referencias</u> :

(1) Devaney, R.L.: 1979, 'Structural Stability of Homotetic Solutions of the Collinear n-body Problem', Celestial Mechanics, <u>19</u>, 391-404

(2) McGehee, R.: 1974, 'Triple Collision in the Collinear Three Body Problem', Invent. Math. <u>27</u>, 191-227.

(3) Palmore, J.: 1973, 'Classifying Relative Equilibria.I', Bull. Amer. Math.Soc. <u>79</u>, 904-908.

(4) Simó, C.: 1980, 'Masses for which Triple Collision is Regularizable', Celestial Mechanics, 21, 25-36.

(5) Smale, S.: 1970, 'Topology and Mechanics.II', Inven. Math. 11, 45-64.

(6) Waldvogel, J.: 1976, 'The Three-Body problem near Triple Collision', Celestial Mechanics, 14, 287-300.

(7) Waldvogel, J.: 1979, 'Stable and Unstable Manifolds in Planar Triple Collision', Instabilities in Dynamical Systems, 263-271.