Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

# ESPACIOS $L^p$ CON NORMA MIXTA

Miguel Angel Triana Santos

E.T.S. Ingenieros Industriales. Zaragoza

Abstract.: In this paper we study the $L^{p,q}$-spaces introduced by Benedek and Panzone in (1). We prove that $L^{p,q}$ is a r-normed, complete space of type r, where r=min(1,p,q). We interpret the $L^{p,q}$-spaces like the completion of the tensor product space $L^p \otimes L^q$ with a determinated metric and we obtain the dual space of $L^{p,q}$ $(0<p,q<\infty)$.

## 1.-Los Espacios $L^{p_1,\dots,p_n}$ de Benedek-Panzone.-

Sean $(X_i,S_i,\mu_i)$ con $1\leq i\leq n$, n espacios de medida positiva $\sigma$-finita y completa y $P=(p_1,\dots,p_n)$ una n-tupla, con $1\leq p_i\leq\infty$. Una función

$$f:\prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow C$$

$$(x_1,\dots,x_n)\longrightarrow f(x_1,\dots,x_n)$$

medible en el espacio producto $(X,S,\mu)=(\prod_{i=1}^{n}X_i,\prod_{i=1}^{n}S_i)$ se dice que pertenece a $L^P(X)$ si el número obtenido después de tomar sucesivamente la norma $p_1$ en $x_1$, la norma $p_2$ en $x_2,\dots$, la norma $p_n$ en $x_n$, y en este orden, es finito. A dicho número se le denota por $\|f\|_P$ ó $\|f\|_{p_1,\dots,p_n}$.

Consideremos ahora el caso $0<P\leq\infty$ (esto es $0<p_i\leq\infty$ donde $1\leq i\leq n$), y sea $r=\min_{1\leq i\leq n}(p_i)$ con $r<1$; se define $\|\cdot\|_P$ de la misma forma que para exponentes mayores que 1. También podemos definir de forma análoga el espacio $L^P$, que en este caso será r-normado, con $(\|\cdot\|_P)^r$.

A partir de aquí nos centraremos en el estudio del caso de dos exponentes p,q, y supondremos que $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son dos espacios de medida positiva $\sigma$-finita y completa, y consideraremos $L^{p,q}(X\times Y)$.

Para el siguiente Teorema supondremos que los espacios $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son no triviales, esto es, que existen sucesiones $(A_n)_{n\in N}\subseteq\mathcal{A}$ y $(B_n)_{n\in N}\subseteq\mathcal{B}$ de conjuntos medibles disjuntos tales que $\mu(A_j)\neq 0$ y $\nu(B_j)\neq 0$ para todo $j\in N$.

<u>Teorema 1.-</u> $L^{p,q}$ con $0<p,q\leq\infty$ y $r=\min(p,q)<1$, es un espacio r-normado, completo de tipo r.

## <u>2.- $L^{p,q}$ como Producto Tensorial.-</u>

Consideremos el espacio $L^p(X)\otimes L^q(Y)$ $(0<p,q\leq\infty)$ producto tensorial de los espacios $L^p(X)$ y $L^q(Y)$. Queremos hacer una identificación entre $L^p(X)\otimes L^q(Y)$ y un subespacio de $L^{p,q}(X\times Y)$; para ello definimos la aplicación $\Phi$: $L^p(X)\otimes L^q(Y)\longrightarrow L^{p,q}(X\times Y)$ de la siguiente forma $\Phi(\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes g_i)=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot g_i$ donde $f_i\cdot g_i(x,y)=f_i(x)g_i(y)$.

Se puede comprobar que $\Phi$ es una aplicación lineal. Para demostrar que es inyectiva necesitaremos algunos resultados; Si $\omega\in L^p(X)\otimes L^q(Y)$ se cumple que:

a) $\lambda(\omega)=\|\Phi(\omega)\|_{p,q}$ $(1\leq p,q\leq\infty)$ donde $\lambda$ es la norma tensorial ((3), p.221): $\lambda(\omega)=\sup\left\{|(u\otimes v)(\omega)|;\ u\in(L^p)',\ v\in(L^q)',\ \|u\|,\|v\|\leq 1\right\}$

b) $\|\Phi(\omega)\|_{p,q}^{r}\leq\alpha_r(\omega)$ $(0<p,q\leq\infty,\ r=\min(1,p,q))$, donde $\alpha_r$ es la r-norma en $L^p\otimes L^q$ ((4), p.199):

$$\alpha_r(\omega)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\|f_i\cdot g_i\|_{p,q}^{r}\ ;\ \omega=\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes g_i\right\}$$

c) $\alpha_q(\omega)=\|\Phi(\omega)\|_{p,q}^{q}$ $(0<q\leq 1,\ q\leq p\leq\infty)$.

<u>Teorema 2.-</u> El espacio $L^p(X)\otimes L^q(Y)$ con $0<p,q<\infty$, es denso en $L^{p,q}(X\times Y)$ mediante la identificación $\Phi$.

Definimos $L^p(X)\hat{\otimes}_r L^q(Y)$ como la complección del espacio $L^p(X)\otimes L^q(Y)$ con la r-norma $\alpha_r$.

<u>Corolario 1.-</u> Si $0<q\leq 1$ y $q\leq p<\infty$, entonces $L^p(X)\hat{\otimes}_q L^q(Y)=L^{p,q}(X\times Y)$, tomando la q-norma tensorial $\alpha_q$.

Como aplicación de las propiedades anteriores se obtiene una generalización de la desigualdad de Minkowski:

Teorema 3.- Sean $q \leq p < \infty$, $0 < q \leq 1$, f una función medible en $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ entonces:

$$\left( \int \left( \int |f|^{q} d\nu \right)^{p/q} d\mu \right)^{q/p} \leq \int \left( \int |f|^{p} d\mu \right)^{q/p} d\nu .$$

## 3.- Dualidad entre Espacios $L^{p,q}$.-

El dual de $L^{p,q}$ cuando los dos exponentes p,q son mayores o iguales que 1 es conocido ((1) p.304). Por lo tanto estudiaremos el caso en que uno o los dos exponentes sea menor que 1. Para ello recordaremos que: "Si f es una función medible y A un átomo entonces f es constante a.e. en A" ((2) p.819). Por notación llamaremos f(A) al valor de dicha constante.

Supongamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son dos espacios de medida, $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$, $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}$ colecciones de representantes de las clases de átomos de $\mu$ y $\nu$ respectivamente, con $\mu(A_i)=1$, $\nu(B_j)=1$, $A=\bigcup_{i \in I} A_i$ y $B=\bigcup_{j \in J} B_j$, entonces:

Teorema 4.- Si $0<p,q<1$, el dual topológico de $L^{p,q}(X \times Y)$ es isométricamente isomorfo a $l^{\infty}(I \times J)$ mediante la identificación dada por

$$U: l^{\infty}(I \times J) \longrightarrow (L^{p,q}(X \times Y))'$$
$$\alpha = (\alpha_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \longrightarrow U_{\alpha}$$

donde $U_{\alpha}(f) = \sum_{(i,j) \in I \times J} f(A_i \times B_j)\, \alpha_{ij}$ para cada $f \in L^{p,q}(X \times Y)$.

En particular, si $\mu$ ó $\nu$ son no atómicas $(L^{p,q}(X \times Y))'=0$.

Teorema 5.- Si $0<q<1 \leq p<\infty$ y $p'=p/(p-1)$, el dual topológico de $L^{p,q}(X \times Y)$ es isométricamente isomorfo a $L^{p',\infty}(X \times J)$ mediante la identificación dada por

$$U: L^{p',\infty}(X \times J) \longrightarrow (L^{p,q}(X \times Y))'$$
$$g=(g_j)_{j \in J} \longrightarrow U_g$$

donde $U_g(f) = \sum_{j \in J} \int f_j g_j \, d\mu$ para cada $f \in L^{p,q}(X \times Y)$, siendo $f_j$ la función de $L^{p}(X)$ inducida por la restricción de f a $X \times B_j$.

En particular si $\nu$ no atómica $(L^{p,q})'=0$.

Se obtiene un resultado análogo para el caso $0<p<1 \leq q<\infty$.

NOTA: Estos resultados son un resumen de mi Tesina de Licenciatura (5) dirigida por el Profesor J.L. Rubio de Francia al cual quiero expresar mi agradecimiento por su valiosa ayuda.

## REFERENCIAS


(1) Benedek, A.; Panzone, R.: "The spaces $L^P$ with mixed norm". Duke. Math. J. 28 (1961), 301-324.

(2) Day, M.M.: "The spaces $L^p$ with $0<p<1$". Bull. A.M.S. 46 (1940), 816-823.

(3) Diestel, J.; Uhl, J.R.: "Vector measures". A.M.S. Providence.

(4) Gramsch, B.: "Integration und Holomorphe Funktionen in lokalbeschrankten Raume". Math. Annalen., 162 (1965), 190-210.

(5) Triana, M.A.: "Espacios $L^P$ con norma mixta". Memoria de Licenciatura. Dpto. Teoría de Funciones. Universidad de Zaragoza.