Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

# A GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF SCHAUDER BASIS

Andrés Reyes Rodriguez

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

Abstract.

Concerning basis in a Banach space, a characterization for a weak basis to be a Schauder basis is given in terms of the geometrical behavior of the set of linear, closed hulls wich are generated by subsequences of the expansion sequences of the basis.

---

1.- INTRODUCION Sea $\int = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base débil en un espacio de Banach reflexivo B. Si $(\overset{(n)}{x})_{n \in \mathbb{N}}$ representa la sucesión coordenada de $x \in B$ ; $(x \neq \emptyset)$, respecto de $\int$ , la sucesion de expansión del vector x $\int_x = (\overset{(1)}{x} a_1 + \ldots + \overset{(n)}{x} a_n )_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión minimal y completa en $[ a_k ; k \in C_x ]$ , donde $C_x$ es el conjunto no vacío $\{ n \in \mathbb{N} ; \overset{(n)}{x} \neq 0 \}$ y $[\ ]$ denota la envoltura lineal y cerrada.

A. Plans en [4] dá la siguiente caracterización para que un sistema de vectores $\int$ en B sea sistema débil:

$$[\textstyle\int_1] \cap [\textstyle\int_2] = \{\emptyset\},$$

cualesquiera que sean $\int_1$ y $\int_2$ subsistemas disjuntos de $\int$.

Este resultado sugiere considerar los sistemas de vectores en B bajo un nuevo aspecto geométrico; concretamente, a traves del comportamiento de la operación intersección de las envolturas lineales y cerradas engendradas por subsistemas de $\int$, ó por subsistemas de la sucesión de expansión $\int_x$ $(x \in B - \{0\})$, para sistemas débiles.

En este orden de ideas, hemos probado el siguiente resultado :

TEOREMA 1.1.- Una base débil $\int$ en $B$ es base de Schauder si y sólo si $\bigcap \{[\tilde{\int}]$ ; $\tilde{\int}$ subsucesión de $\int_x\} = [x]$, para cada $x \in B$ .

2.- <u>NOTACIONES</u>

Trabajaremos en un espacio de Banach reflexivo B real ó complejo. Una sucesión $\int = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ completa en B, verificando las siguientes condiciones :

a) El núcleo $N(\int)$ es el subespacio nulo; es decir

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, \dots] = \{0\}$$

b) $\int$ es minimal; esto es, existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $B^*$ tal que $f_n(a_m) = \delta_{m,n}$,

se dirá <u>base débil</u> [3]. A la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nos referiremos en este trabajo como la <u>sucesión conjugada</u> de la $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $\int$ es una sucesión minimal completa en B escribiremos

$$W_S = [a_k ; k \in S]$$

y

$$W^*_S = \bigcap_{k \notin S} \operatorname{Ker} f_k ,$$

para cualquier subconjunto $S$ de $\mathbb{N}$.

En particular

$$W^*_\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} f_n = N(\int)$$

Entonces, $W^*_\emptyset = \{0\}$ si $\int$ es débil.

Por convenio tomaremos $W_\emptyset = \{0\}$ y $W^*_{\mathbb{N}} = B$.

Por último, con $\xrightarrow[n]{}$ y $\xrightarrow[n]{}$ denotaremos la convergencia fuerte y débil en B, respectivamente.

## 3.- RESULTADOS PREVIOS

PROPOSICION 3.1.- Si $\int$ es base débil en B y $x \in B$ es tal que $x^{(n)} \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $N(\int_x) = [x]$.

COROLARIO 3.2.- Si $\int$ es base débil en B tal que $W^*_S = W_S$, entonces

$$N(\int_x) = [x] \quad , \quad ( x \in B - \{0\} ).$$

Equivalentemente

$$\bigcap \left\{ [\tilde{\int}] \; ; \; \tilde{\int} \text{ subsistema de } \int_x \text{ cofinito} \right\} = [x] \quad (1).$$

El siguiente resultado da una mayor restricción a (1) para las bases de Schauder:

COROLARIO 3.3.- Para cualquier base de Schauder $\int$ en B y para cualquier $x \in B - \{0\}$ se tiene

$$\bigcap \left\{ [\tilde{\int}]; \; \tilde{\int} \text{ subsucesión de } \int_x \right\} = [x].$$

* * *

Al aplicar el concepto de límite de una sucesión de conjuntos en un espacio topológico [ 1 ] a una sucesión de variedades lineales y cerradas $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en B, resulta la siguiente definición:

DEFINICION (A.Plans [ 5 ] ) La sucesión $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>converge débilmente</u> a M si:

a) Para cualquier sucesión de vectores $(x_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$, con $x_{p_n} \in M_{p_n}$, $x_{p_n} \xrightarrow[n]{} x$ implica que $x \in M$.

b) Para cada $x \in M$ existe $x_n \in M_n$ tal que $x_n \xrightarrow[n]{} x$.

Escribiremos $M_n \xrightarrow[n]{} M$.

LEMA 3.4.- Dada $\int = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de vectores en B, $[b_n]_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente al subespacio nulo si y sólo si para cualquier sucesión $(b_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ doblemente acotada, con $b_n^* \in [b_n]$, se sigue que $b_n^* \xrightarrow[n]{} 0$.

LEMA 3.5.- Dadas $\int_1 = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\int_2 = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de vecto- en B tales que :

1) $[c_n] \xrightarrow[n]{} \{\emptyset\}$,

2) $\partial([b_n],[c_n]) \xrightarrow[n]{} 0$ (*),

se sigue que $[b_n] \xrightarrow[n]{} \{\emptyset\}$.

LEMA 3.6.- (Bessaga-Pelczynski [ 2 ] ) Cualquier sucesión en B doblemente acotada ,que converge débilmente al vector nuló, posee una subsucesión Schauder . En particular, una subsucesión con núcleo el subespacio nulo.

## 4.- PRUEBA DEL TEOREMA

De acuerdo con los lemas anteriores se deduce que si $\int = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base débil en B tal que

$$\bigcap \left\{ [\tilde{\int}] \; ; \; \tilde{\int} \text{ subsucesión de } \int_x \right\} = [x] ,$$

entonces $x^1 a_1 + \dots + x^n a_n \xrightarrow[n]{} x$.

El teorema de la acotación uniforme y el corolario 3.3. concluyen la tesis del teorema propuesto en este artículo.

CONSECUENCIA.- Dada $\int$ débil, $\int$ es heterogonal (ó incondicional) si y sólo si para cada $x \in B$ y para cualquier reordenación $\oint$ del sistema $\int$,

$$\bigcap \left\{ [\tilde{\oint}] \; ; \; \tilde{\oint} \text{ subsucesión de } \int_x \right\} = [x].$$


## BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDROFF, P. HOPF, H. "Topologie". Chelsea Publishing Company (1965).

[2] BESSAGA, C. PELCZYNSKI, A. "On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces" Studia Math. 17, p.151-164.(1958).

[3] DIXMIER, J. "Etude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications". Bull. Soc. Math. France, T. 77, p. 11 - 101. (1949).

[4] PLANS, A. "A generalization of heterogonal systems" Archiv. der Mathematik, Fasc. 4, Vol XXVI. (1975).

[5] PLANS, A. "Simplificación lineal en el espacio de Hilbert" Rev. Hisp-Amer. 4ª Serie, T. XXVIII, nº 5, (1968)


(*) El símbolo $\partial(-,-)$ denota inclinación.