Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

UNA NOTA SOBRE EL TEOREMA DE GLEASON-KAHANE-ZELASKO

Fernando Pérez González

Dpto. de Ecuaciones Funcionales
Universidad de La Laguna

Abstract.- Siendo A un álgebra conmutativa compleja, localmente convexa Hausdorff de inversión continua (no necesariamente semicompleta), se demuestra que todo hiperplano de A que solo contenga clemento singulares, es un ideal maximal de A.

§1.- Todas las álgebras consideradas en esta nota se supondrán definidas sobre el cuerpo C, conmutativas, con elemento unidad e, y provistas de una topología Hausdorff compatible con la estructura de espacio vectorial, mediante la cual la aplicación (bilineal) producto es continua.

Fué establecido independientemente por GLEASON [3] y por KAHANE-ZELASKO [5], que si A es un álgebra de Banach y M un hiperplano que no posee elementos regulares, entonces M es un ideal maximal de A. Años más tarde, este mismo aserto es extendido a Q-álgebras localmente multiplicativamente convexas, toneladas y completas [1].

En esta comunicación se hace ver que el teorema de Gleason-Kahane-Żalasko es válido si A es un álgebra localmente convexa de inversión continua (en el sentido de [8]), y, consecuentemente, para cualquier tipo de Q-álgebra localmente multiplicativamente convexa, no necesariamente completa ni tonelada.

§2.- Un álgebra localmente convexa se dice que es de <u>inversión continua</u>, si existe un entorno U del origen tal que $e+U\subset G(A)$ y la aplicación $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua en $e+U$.

Algunas propiedades de este tipo de álgebras son, entre otras, las siguientes ([1], [7] y [8]) :

a) El grupo $G(A)$ de los elementos inversibles de A es abierto, esto es, A es Q-álgebra y la aplicación $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua en $G(A)$.

b) Todo ideal maximal de A es cerrado.

c) El espectro $sp(a)$ de cualquier a de A es compacto no vacío.

d) Todo funcional lineal multiplicativo (carácter) sobre A es continuo y existe una correspondencia uno a uno entre el espacio de los ideales maximales de A y el de los funcionales lineales multiplicativos. Ambos espacios, identificados, se denotarán por $\mathcal{M}(A)$.

e) Para todo a de A, es $sp(a)=\{h(x):\ h\in\mathcal{M}(A)\}$.

f) La aplicación ρ que asigna a cada elemento su radio espectral es una seminorma continua sobre A.

<u>Proposición 1</u>.- En un álgebra A localmente convexa de inversión continua, el espacio $\mathcal{M}(A)$ es $\sigma(A',A)$-compacto.

Demostración: Por f), $b_\rho(1)=\{x\in A:\ \rho(x)\leq 1\}$ es entorno del origen de A, y, por e), es $\mathcal{M}(A)^{o}=b_\rho(1)$. En virtud del teorema de Alaoglu-Bourbaki ([4], p. 201), resulta que $\mathcal{M}(A)^{oo}$ es $\sigma(A',A)$-compacto. Por otra parte, fijados al arbitrio x e y en A, la aplicación $f \longrightarrow f(xy)-f(x)f(y)$ es obviamente continua sobre A' con la topología débil, y por ello el espacio

$$\mathcal{M}(A)=\bigcap_{x,y\in A}\{h\in A':\ h(xy)-h(x)h(y)=0\}$$

es $\sigma(A',A)$-cerrado, infiriéndose así ya la compacidad débil de $\mathcal{M}(A)$.

§ 3.- Representemos cada a de A por la función continua $\hat{a}$ de $\mathcal{M}(A)$ en C, donde $\hat{a}(h)=h(a)$, y consideremos, por otro lado, el álgebra de Banach $\mathcal{C}(\mathcal{M}(A))$ de las funciones complejas continuas sobre

$(\mathcal{M}(A),\sigma(A',A))$, con las operaciones aritméticas usuales definidas puntualmente y con la norma del supremo. De este modo, la transformación G de Gelfand, $G(x)=\hat{x}$, $x\in A$, es un homomorfismo (de álgebras), siendo $G(A)=\hat{A}$ un álgebra normada con elemento unidad $G(e)=\hat{e}$.

La demostración del teorema que sigue, inspirada en [1], requiere de un conocido hecho de carácter algebraico que nos limitamos a enunciar:

<u>Lema 2</u>.- La condición necesaria y suficiente para que un elemento de A sea inversible (resp., sea singular) es que no pertenezca (resp., pertenezca) al núcleo de ningún (resp., algún) funcional lineal multiplicativo sobre A.

<u>Teorema 3</u>.- Sea A un álgebra localmente convexa de inversión continua. Todo hiperplano M de A disjunto con G(A), es un ideal maximal de A.

Demostración: Pongamos $G(M)=\hat{M}$ y probemos ante todo que $\hat{M}$ es un hiperplano cerrado de $\hat{A}$. Como cod M=1, es $A = \bigcup_{\lambda\in C}(\lambda e+M)$ y, en consecuencia,

$$\hat{A} = \bigcup_{\lambda\in C}(\lambda\hat{e}+\hat{M}) \qquad (1)$$

Si $\hat{e}\in\hat{M}$, sería $\hat{e}=\hat{x}$ para algún x de M, lo que supone $h(x-e)=0$, esto es, $h(x)=1$, para todo h de $\mathcal{M}(A)$. Ahora bien, por el Lema 2, tendría que ocurrir que $x\in G(A)$, lo que es imposible. Será, pues, cod $\hat{M}=1$. Si $\hat{M}$ fuera denso en $\hat{A}$, podremos elegir $\{x_n\}$ en M tal que $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{e}$. Para $0<\varepsilon<1$, se tendría: $\|\hat{x}_n-\hat{e}\| = \sup_{h\in\mathcal{M}(A)}|h(x_n)-1|<\varepsilon$, para n suficientemente grande, y ello entraña $h(x_n)\neq 0$, para todo h de $\mathcal{M}(A)$, llegándose, con un nuevo uso del Lema 2, a una contradicción. Luego, $\hat{M}$ es hiperplano cerrado de $\hat{A}$.

Procediendo de forma análoga, puede constatarse que

$$\overline{\hat{M}} \cap G(\overline{\hat{A}}) = \emptyset \qquad (2)$$

siendo, naturalmente, $\overline{\hat{A}}$ álgebra de Banach. Además, cod $\overline{\hat{M}}=1$ en $\overline{\hat{A}}$.

En efecto, sea $g \in \bar{\hat{A}}$, $\hat{x}_n \longrightarrow g$ con $\hat{x}_n \in \hat{A}$ y, por (1), $\hat{x}_n = \lambda_n \hat{e} + \hat{y}_n$, donde $\hat{y}_n \in \hat{M}$. Veamos que $\{\lambda_n\}$ es de Cauchy. Si así no fuera, para un cierto $\alpha > 0$ y para todo $n_0 > 0$, sería $|\lambda_p - \lambda_q| > \alpha$, para ciertos p y $q > n_0$. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, es

$$\| \hat{x}_n - \hat{x}_m \| = \| (\lambda_n - \lambda_m)\hat{e} + (\hat{y}_n - \hat{y}_m) \| \leqslant \alpha \varepsilon$$

con $n, m \geqslant N_0$. Combinando, para p y q como antes, se llegaría a $\| \hat{e} + (\lambda_p - \lambda_q)^{-1}(\hat{y}_p - \hat{y}_q) \| \leqslant \varepsilon$, lo que supone $(\lambda_p - \lambda_q)^{-1}(\hat{y}_p - \hat{y}_q) \in \hat{M} \cap G(\bar{\hat{A}})$, en contraposición con (2). Al ser, por tanto, $\{\lambda_n\}$ de Cauchy en C, también lo será $\{\hat{y}_n\}$ en $\hat{M}$. Poniendo ahora $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ e $\hat{y}_n \longrightarrow f$, $f \in \bar{\hat{M}}$, será $g = \hat{e} + f$. Luego, cod $\bar{\hat{M}} = 1$ en $\bar{\hat{A}}$, y en virtud de §1, $\bar{\hat{M}}$ es ideal maximal de $\bar{\hat{A}}$. Por otra parte, como $\hat{M}$ es subespacio cerrado de $\hat{A}$, se desprende que $\hat{M}$ es ideal de $\hat{A}$, y por ello, $G^{-1}(\hat{M})$ lo será igualmente de A. Finalmente, siendo $G^{-1}(\hat{M}) = M$, como se comprueba sin dificultad, y cod $M=1$, se concluye que M es ideal maximal de A.

c.q.d.

<u>Nota</u>.- Puesto que una Q-álgebra localmente multiplicativamente convexa es, obviamente, un caso particular de un álgebra como la referida en el teorema 3, es claro que el teorema de [1] subsiste igualmente sin precisarse a fortiori que el álgebra sea tonelada o completa.

Por último, obtenemos caracterizaciones de funcionales y operadores lineales multiplicativos entre álgebras localmente convexas de inversión continua, las cuales extienden los teoremas 2, 4 y 5 de [5]. Los asertos correspondientes -para los que vale la afirmación hecha en la nota precedente- los enunciamos a continuación, omitiéndose sus demostraciones ya que, a partir del teorema 3, son semejantes a las de los resultados de [5] citados.

<u>Proposición 4</u>.- Si A es como en el teorema 3 y $f \in A^*$, son equivalentes:

a) $f \in \mathcal{M}(A)$.

b) $f(x) \in sp(x)$, para todo x de A.

Proposición 5.- Sean A_1 y A_2 como en el teorema 3, con elementos unidad e_1, y e_2 y A_2 semisimple. Si T es una aplicación lineal de A_1 en A_2 y

$$sp_{A_2}(T(x)) \subset sp_{A_1}(x) \qquad (3)$$

para todo x de A_1, entonces T es multiplicativo, es decir, $T(xy)=T(x)T(y)$, para todo x,y de A_1. Reciprocamente, si T es multiplicativo y $T(e_1)=e_2$, entonces se cumple (3) aunque A_2 no sea semisimple

Bibliografía

[1] .- E.BECKENSTEIN-L.NARICI-G.BACHMAN.-"Maximal ideals in topological algebras".J.Analyse Math.,25,(1972),159-161

[2] .- E.BECKENSTEIN-L.NARICI-C.SUFFEL.-"Topological algebras" North-Holland Math. Studies, nº 24 (1977) Amsterdam.

[3] .- A.M. GLEASON.-"A characterization of maximal ideals". J. Analyse Math., 19, (1967), 171-172

[4] .- J. HORVATH.- "Topological Vector Spaces and Distributions" Addison-Wesley (1966).Reading. Massachusetts.

[5] .- J.P.KAHANE-W.ZELASKO.-"A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras". Studia Math.,29 (1968), 339-343

[6] .- E.A.MICHAEL.- "Locally multiplicatively convex topological algebras". Mem. Amer. Math. Soc. nº 11 (1952)

[7] .- F.PEREZ GONZALEZ.-"Una clase de funciones generalizadas en álgebras localmente convexas de inversión continua". Tesis. Universidad de La Laguna. (1979).

[8] .-L.WAELBROECK.-"Topological Vector Spaces and Algebras". Springer. Lect. Notes in Math. nº 230 (1971).