Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

UNA NOTA SOBRE CONVERGENCIAS EN $G(\mathcal{H})$

M.C. de las Obras, L. Nasarre

Dpto. de Matemáticas
Universidad de Oviedo

Given a real separable Hilbert space, $\mathcal{H}$, we denote with $G(\mathcal{H})$ the geometry of linear subspaces of $\mathcal{H}$.

In the present paper, the relation betwen the convergences $\longrightarrow$, $\xrightarrow{a}$, $\xrightarrow{b}$ defined in (3) and (4), for sequences of finite codimension, is studied.

Dada una sucesión de subespacios lineales cerrados $\{E^{(n)} \mid n \in N\}$ del espacio de Hilbert separable real, $\mathcal{H}$, recordemos las distintas definiciones de convergencias definidas en (3) y (4).

$$E^{(n)} \longrightarrow E \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Si } x_{h_n} \in E^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \longrightarrow x \Longrightarrow x \in E \\ \forall x \in E \quad \exists x_n \in E^{(n)} \ni x_n \longrightarrow x \end{cases}$$

$$E^{(n)} \xrightarrow{a} E \Longleftrightarrow \underset{\to}{ls}\, E^{(h_n)} = E \quad \forall (h_n) \subset (n)$$

$$E^{(n)} \xrightarrow{b} E \Longleftrightarrow [\underset{\to}{ls}\, E^{(h_n)}] = E \quad \forall (h_n) \subset (n)$$

En (3) se probó que las convergencias $\xrightarrow{a}$ y $\xrightarrow{b}$ verifican los tres axiomas de Frechet (1), pero la propiamente débil $\longrightarrow$ falla en el tercero. En general, se tiene la relación de contenido $\longrightarrow \subset \xrightarrow{a} \subset \xrightarrow{b}$ y en dimensión finita las tres coinciden.

Este trabajo presenta un estudio sobre estas convergencias en sucesiones de subespacios de codimensión finita.

Consideremos en primer lugar una sucesión de hiperplanos $\{\pi_n\} \ni \pi_n \xrightarrow{b} E$, es decir $\{\underrightarrow{ls}\, \pi_{h_n}\} = E \; \forall (h_n) \subset (n)$, y veamos bajo qué condiciones $\underrightarrow{ls}\, \pi_{h_n} = E \; \forall (h_n) \subset (n)$.

Sea $\{\pi_{h_n}\} \subset \{\pi_n\}$ con todos los términos distintos (el caso de igualdad es trivial) y $\{r_{h_n}\}$ la sucesión de los ortogonales.

Atendiendo a la sucesión $\{r_{h_n}\}$ pueden ocurrir dos casos, que no tenga rayo de acumulación débil, o que exista una sucesión parcial $\{r_{k_n}\} \subset \{r_{h_n}\}$ débilmente convergente a un rayo r.

En el primer caso $\pi_{k_n} \longrightarrow \mathcal{H} \; \forall (k_n) \subset (n)$ y por lo tanto $\pi_{k_n} \longrightarrow \mathcal{H}$ y $E = \mathcal{H}$.

En el segundo distinguiremos a su vez otros dos

a) $r_{k_n} \xrightarrow{e} r$ (2).

b) $\exists \{r_{m_n}\} \subset \{r_{k_n}\}$ tal que $r_{m_n} \longrightarrow r$.

Si $r_{k_n} \xrightarrow{e} r$ por definición $r_{k_n} \longrightarrow o$ y $E^{\perp} = o$ con lo que $E = \mathcal{H}$, pero en condiciones análogas se encontró en (3) una sucesión de hiperplanos $\{\pi_n \mid n \in N\}$ tal que $\pi_n \xrightarrow{b} \mathcal{H}$ y $\underrightarrow{ls}\, \pi_{h_n} \neq \mathcal{H}$.

Por el contrario en el caso b) la sucesión de los ortogonales tiene un hiperplano como límite débil $\pi_{m_n} \longrightarrow \pi$ y $E = \pi$ junto con $\underrightarrow{ls}\, \pi_{h_n} = E \; \forall (h_n) \subset (n)$.

Ahora consideraremos el caso general de una sucesión de subespacios de codimensión $q > 1$ $\{E_q^{(n)} \mid n \in N\}$ convergente según $\xrightarrow{b}$ a un subespacio de codimensión p, E_p, con $p \leq q$.

Para $p = q$, la convergencia $E_p^{(n)\perp} \xrightarrow{b} E_p^{\perp}$ equivale a la fuerte de los ortogonales $E_p^{(n)} \longrightarrow E_p$ y esto a su vez a $E_p^{(n)\perp} \longrightarrow E_p^{\perp}$, luego las tres convergencias son idénticas.

Si $p < q$, pasando a los ortogonales $E_q^{(n)} \longrightarrow E_p$ y por (2) $E_q^{(n)} = E_p^{(n)} \underset{\perp}{\oplus} E_r^{(n)}$ junto con $E_p^{(n)} \longrightarrow E_p$ y $E_r^{(n)} \longrightarrow o$. Podemos todavía distinguir aqui dos casos según la sucesión $\{E_r^{(n)} \mid n \in N\}$. Si $E_r^{(n)} \longrightarrow o$, la sucesión $\{E_q^{(n)} \mid n \in N\}$ tiene a su vez a E_p como límite débil y en estas condiciones $\{E_q^{(n)\perp} \mid n \in N\}$ converge débilmente a $E_p^{\perp}$ con lo que las tres convergencias coinciden. Ahora bien, si existe una sucesión de rayos

$\{s_{h_n} \mid n \in N\}$ con $s_{h_n} \in E_r^{(h_n)}$ que converja estrictamente a un rayo s, estamos en el caso ya visto en hiperplanos de no coincidencia.

Resumiendo, si $E_q^{(n)\perp} \xrightarrow{b} E_p^{\perp}$ $q \geq p$, y en la sucesión de los ortogonales $\{E_q^{(n)} \mid n \in N\}$ no existe una sucesión de rayos convergente débil y estrictamente a un rayo s, las tres convergencias coinciden.

El recíproco, en general, no es cierto, ya que debido a la relación de contenido existente, tanto si hay coincidencia como si no, se llega a la convergencia fuerte de los ortogonales y por tanto a $E_r^{(n)} \longrightarrow o$ (2).

BIBLIOGRAFIA

(1) DUDLEY, R. M. "On sequential convergence", Trans. Amer. Math. Soc., T. 112 (1964).

(2) OBRAS, M. C. "Sobre convergencia en el espacio de Hilbert de sucesiones de subespacios de dimesión o codimensión finita II", Rev. Mat. His.-Amer., 4ª Serie, T. XXXIV, nº 6 (1974).

(3) OBRAS, M. C. "$\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{\perp}$-convergencias en $G(\mathcal{H})$", en prensa.

(4) PLANS, A. "Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert", Rev. Mat. His.-Amer., 4ª Serie, T. XXI, nº 3-4 (1961).