Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

UNA CARACTERIZACION DE LAS BORNOLOGIAS POLARES

Miguel A. Canela

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Barcelona

ABSTRACT: Let E be a regular b.c.s. (a Hausdoff l.c.s.), and let F be a normed space. We consider the spaces E^1 all bounded (continuous) linear mappings of E into F, provided with its natural topology (its equicontinuous bornology). By defining $E^n = (E^{n-1})^1$ for every n 1, we obtain a sequence $(E^n)_n$ composed by, alternatively, b.c.s. and l.c.s.. We study the inclusion of E into E^2, giving a necessary and sufficient condition for a regular b.c.s. to be polar.

Adotaremos la terminología y notaciones de (4) en lo que a los espacios bornológicos convexos (e.b.c.) se refiere. Si E es un e.b.c. notaremos por $E^{\times}$ su dual bornológico, y por $E^{\times}_{\mu}$ el mismo espacio cuando lo consideremos dotado de su topología natural, es decir, de la topología de la convergencia sobre los acotados de E. Si E es un espacio localmente convexo (e.l.c.), indicaremos por E'_e el e.b.c. obtenido al dotar a su dual topoloógico de la correspondiente bornología equicontinua. Del mismo modo, si F es otro e.l.c. sobre el mismo cuerpo, indicaremos por $L_e(E,F)$ el espacio de aplicaciones lineales continuas de E en F, dotado de su bornología equicontinua. $L_e(E,F)$ es un e.b.c. regularmente separado (suponemos todos los e.l.c. que aparecen separados) y polar, que es completo si y solamente si F es completo en el sentido de Mackey (véase (1)).

Sea F un espacio normado, que mantendremos fijo a lo largo de nuestra discusión, y sea V la bola unidad cerrada en ese espacio. Si E es un e.l.c. sobre el mismo cuerpo, indicamos por E^1 el e.b.c. $L_e(E,F)$. Si E es, alternativamente, un e.b.c., indicamos por E^1 el espacio $L^x(E,F)$ de las aplicaciones lineales acotadas de E en F, dotado de su topología natural $\mathcal{U}$, de la cual una base de entornos viene dada por los conjuntos:

$$B^{\Delta} = \left\{ f \in L^x(E,F) : f(B) \subset V \right\},$$

recorriendo B una base de bornología de E. Más detalles sobre esta topología pueden hallarse en (2), (3) o (5) (el funtor Lub de la página 58). Recordemos que $L^x(E,F) \neq 0$ si y solamente si $E^x \neq 0$ (suponemos, obviamente, F no trivial).

Si E es un e.l.c., o un e.b.c. regular, podemos definir como antes E^1, y por recurrencia:

$$E^n = (E^{n-1})^1, \text{ para todo } n > 1,$$

con lo cual, con las oportunas identificaciones, obtenemos dos sucesiones crecientes:

$$E \subset E^2 \subset E^4 \subset \dots \subset E^{2n} \subset \dots$$

$$E^1 \subset E^3 \subset E^5 \subset \dots \subset E^{2n-1} \subset \dots,$$

una formada por e.l.c. y otra por e.b.c.. Veremos en lo que sigue la naturaleza de estas inclusiones.

<u>Proposición</u>: Si E es un e.l.c., E es un subespacio topológico de E^2.

En el caso de un e.b.c., E no es siempre un subespacio bornológico de E^2, y esta propiedad nos sirve para generalizar la caracterización de los e.b.c. polares como aquellos espacios E para los cuales su bornología coincide con la inducida por $(E^{x}_{\mu})'_{e}$.

Proposición: Si E es un e.b.c. regularmente separado, la inclusión de E en E^2 es acotada. E es un subespacio bornológico de E^2 si y solamente si es polar.

Pueden estodiarse otras propiedades del e.b.c. (o e.l.c..) E en relación con su inclusión en la sucesión $(E^{2n})_n$, tales como poseer una bornología completa, topológica, etc.. Otros resultados en esta línees aparecerán en (2).

BIBLIOGRAFIA.-

(1) M. A. CANELA: Bornología equicontinua en un espacio de aplicaciones lineales continuas. Comunicación presentada en las VI Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Santander (1979).

(2) M. A. CANELA: Espacios de aplicaciones lineales acotadasa valores en un espacio localmente convexo. En preparación.

(3) H. HOGBE-NLEND: Complétion, tenseurs et nucléarité en bornologie. Journal Math. pures et appl., 49 (1970), 193-288.

(4) H. HOGBE-NLEND: Théorie des bornologies et applications. Springer Lecture Notes 213 (1971).

(5) Séminaire Banach. Springer Lecture Notes 277 (1972).