Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE COMPORTAMINETO ASINTOTICO DE CEROS DE POLINOMIOS ORTOGONALES

Mª Pilar Alfaro García

Dpto. de Teoría de Funciones
Universidad de Zaragoza

Abstract: In this paper, we obtain a result about the asymtotic behavior of the orthogonal polynomials on the unit circle in the so-called case C.

En la teoría de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad, se presentan dos situaciones distintas, habitualmente llamadas casos C y D [1]. Para ambas se obtuvieron en [3] caracterizaciones de muy diversa índole, de las que sólo utilizaremos aquí la relativa a la convergencia de la sucesión de excesos $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ ([2]):

$$\text{Caso C:} \quad \lim_n e_n > 0 .$$
$$\text{Caso D:} \quad \lim_n e_n = 0$$

En el primer caso se sabe además que la sucesión de n-núcleos $\{\hat{K}_n(z,0)\}_{n=0}^{\infty}$, [2], converge uniformemente en cualquier disco cerrado $D_r = \{z : |z| \leq r\}$ contenido en el círculo unidad abierto U ([1]).

Estudiamos ahora, en el caso C, algún aspecto del comportamiento asintótico de las raíces de la sucesión ortonormal $\{\hat{P}_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ([2]).

En [4] se demostró que las raíces α_{in} de $\hat{P}_n(z)$ $(n \in N)$ verifican la condición:

$$\left| \frac{\alpha_{in}\hat{P}_{n-1}(\alpha_{in})}{\hat{K}_{n-1}(\alpha_{in},0)} \right| = \frac{|w_n|}{e_{n-1}}$$

donde $w_n = -e_{n-1}\sqrt{e_n}\,\hat{P}_n(0)$ $(n \geq 1)$ y $0 \leq |w_n|/e_{n-1} < 1$ (v. [2]).

Siendo $|\alpha_{in}| < 1$ y $\left|\dfrac{\hat{P}_{n-1}(z)}{\hat{K}_{n-1}(z,0)}\right| < 1$ si $|z| < 1$, ello supone $1 > |\alpha_{in}| > |w_n|/e_{n-1}$, es decir, todas las raíces de cada $\hat{P}_n(z)$ están situadas en la corona de centro en el origen y radios $|w_n|/e_{n-1}$ y 1. En el caso C, $\lim\limits_n |w_n|/e_{n-1} = 0$, lo que hace posible la existencia de raíces "muy próximas" al origen. En el caso D, $\underline{\lim\limits_n}\ |w_n|/e_{n-1} = \lambda$, $(0 \leq \lambda \leq 1)$, por lo que, excluído quizás el caso $\lambda = 0$ que corresponde a $\lim\limits_n e_n/e_{n-1} = 1$, la situación es en cierto modo opuesta a la anterior: Para cada ε, $(0 < \varepsilon < \lambda)$, existirá una corona circular de radios $\lambda-\varepsilon$ y 1, en la que estarán las raíces de $\hat{P}_n(z)$ desde un cierto n en adelante. En particular, en el caso extremo $\lambda = 1$, habrá raíces arbitrariamente próximas a la frontera.

Probamos a continuación cómo es, en el caso C, la distribución de las raíces en torno al origen.

<u>TEOREMA 1</u>. Sea $p \in N$. En el caso C, cualquier entorno del origen contiene, al menos, p raíces de cada polinomio $\hat{P}_n(z)$, desde un cierto n en adelante.

<u>Demostración</u>.- En [3] se obtenía la relación recurrente de orden p, válida para $0 < p \leq n$,

$$\sqrt{e_{n-p}}\, z^p \hat{P}_{n-p}(z) - \sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(z) = \sum_{j=0}^{p-1} \tau_{n-j} z^j \hat{K}_{n-j-1}(z,0) \qquad (1)$$

donde $\tau_n = w_n/e_{n-1}$, $n \geq 1$ (v. [2]).

Por tanto,

$$\left|\sqrt{e_{n-p}}\, z^p \hat{P}_{n-p}(z) - \sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(z)\right| \leq \sum_{j=0}^{p-1} |\tau_{n-j}| \cdot |z^j \hat{K}_{n-j-1}(z,0)| \quad (2)$$

Sea p fijo. Cuando $n \to \infty$, $\tau_{n-j} \to 0$ (v. [2]) y $\{z^j \hat{K}_{n-j-1}(z,0)\}_n$ converge uniformemente a $z^j \hat{K}(z,0)$ $(j=0,1,\ldots,p-1)$, (v. [3]), en cualquier disco D_r contenido en U. Por consiguiente, cada uno de los p sumandos del segundo miembro de (2) converge uniformemente a cero en D_r, con lo cual también

$$\{\sqrt{e_{n-p}}\, z^p \hat{P}_{n-p}(z) - \sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(z)\}_n \longrightarrow 0 \quad [\text{unif.}] \text{ en cada } D_r .$$

Aplicando un conocido teorema de Weierstrass se puede asegurar que, fijado $\varepsilon > 0$ para cada $h = 0,1,\ldots,p-1$ existe $n_h \in N$ tal que si $n \geq n_h$ y $z \in D_r$

$$\left| D^{(h}\left[\sqrt{e_{n-p}}\, z^p\, \hat{P}_{n-p}(z) - \sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(z) \right| < \varepsilon$$

lo que para $z = 0$ se reduce a:

$$\left| \sqrt{e_n}\, \hat{P}_n^{(h}(0) \right| < \varepsilon$$

Sea $N = \max^{o}(n_o, n_1, \ldots, n_h)$. Si $n \geq N$ el polinomio mónico $\sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(z)$ verifica:

$$\left| D^{(h}\left[\sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(z) \right]_{z=o} \right| < \varepsilon \qquad h = 0,1,\ldots,p-1$$

lo que, según un teorema del Algebra clásica (v. [6]), asegura la existencia de p raíces $\{\alpha_{in}\}_{i=1}^{p}$ de $\hat{P}_n(z)$ verificando $|\alpha_{in}| < \varepsilon$ $(i=1,2,\ldots,p)$ #

Puesto que las raíces de los polinomios $\hat{P}_n(z)$ y $\hat{K}_n(z,0)$ son inversas respecto de la circunferencia unidad, podemos enunciar:

TEOREMA 2. En el caso C, para cada $p \in N$ y $A \in R^+$ existe $N = N(p,A)$ tal que si $n \geq N$ el polinomio $\hat{K}_n(z,0)$ tiene al menos p raíces $\{\beta_{in}\}_{i=1}^{p}$ que verifican $|\beta_{in}| > A$ $(i=1,2,\ldots,p)$. #

Queda abierto el problema de decidir si la propiedad que establece el teorema 1 es o no característica del caso C, lo que, en caso afirmativo, supondría disponer de una nueva caracterización de los casos C y D totalmente distinta de las ahora conocidas. Para ello, y de acuerdo con las consideraciones hechas anteriormente, bastará estudiar el comportamiento asintótico de las raíces de los $\hat{P}_n(z)$ cuando $e_n/e_{n-1} \to 1$ y $e_n \to 0$. Pese a su simplicidad de planteamiento, el problema no parece elemental debido a las especiales dificultades que entraña el estudio del caso D.

BIBLIOGRAFIA

[1] AKHIEZER, N.I., "The classical Moment Problem", Univ. Math, Mon; Oliver & Boyd. Londres, 1965.

[2] ALFARO, M., "Teoría paramétrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad". Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2). 29 (1974), pp. 5-79.

[3] ALFARO, M.P., "Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Estudio del caso C". Tesis Doctoral. Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias. Zaragoza, 1978.

[4] ALFARO, M.P.
VIGIL, L. "Sobre ceros de polinomios ortogonales relativos a la circunferencia unidad". VI Jornadas Matemáticas Hispan-Lusas. Santander, 1979.

[5] FREUD, G., "Orthogonal polynomials", Pergamon Press. Londres, 1971.

[6] KNESER, H., "Zur Stetigkeit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung", Math. Z. 48 (1942), 101-104.

[7] MARDEN, M, "Geometry of Polynomials", A.M.S. Providence, 1966.

[8] RUDIN, W., "Real and Complex Analysis", Mc Graw-Hill. Londres, 1970.