Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMLH

# FORMULAS DE SUMACION PARA POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LEMNISCATAS.

Manuel Alfaro García, Francisco Marcellán Español

Dpto. de Teoría de Funciones
ETSI Industriales
Universidad de Zaragoza

Abstract: We obtain two summation formulas for orthogonal polynomials $\{P_n(z)\}$ on the lemniscates L of degree h. We deduce of them some consequences about the behavior of $P_n(z)$ in the interior, in the exterior and on the curve L.

El objeto de este trabajo es obtener fórmulas de sumación para polinomios ortogonales sobre lemniscatas de grado h, es decir, curvas definidas por la ecuación $|A(z)| = R$, donde $A(z)$ es un polinomio complejo de grado h y R es un número real positivo. Fórmulas de este tipo se han obtenido para la curva $|z^2 - 1| = 1$ (lemniscata de Bernouilli) en [3] y para $A(z)$ de raíces simples en [5]. Estudiaremos aquí el caso general en que $A(Z)$ posee raíces cualesquiera. De las fórmulas de sumación se deducirán diversos resultados acerca del comportamiento de los polinomios (PO) en el interior, en el exterior o sobre la lemniscata (L).

Consideremos la descomposición $\Pi_n = A\Pi_{n-h} \oplus (A\Pi_{n-h})^{\perp}$ (1)

donde $\Pi_n$ = {polinomios de grado $\leq n$} y $A\Pi_{n-h}$ = {polinomios de la forma $A(z)P(z)$ con $P(z) \in \Pi_{n-h}$ }. En $(A\Pi_{n-h})^{\perp}$ conocemos dos bases ( $\phi_n(z,j)$ ; j=0,...,h-1 ) y ( $\psi_n(z,j)$ ; j=0,...,h-1 ) introducidas respectivamente en [2] y [7]. Como el n-núcleo $K_n(z,y) = \sum_0^n \overline{\hat{P}_h(y)}\, \hat{P}_h(z) \in \Pi_n$ estudiando su descomposición según (1) se llega a (S-I):

$$\left[R^{-2}\overline{A(y)}A(z) - 1\right]K_{n-h}(z,y) = \sum_{n-h+1}^{n} \overline{\hat{P}_j(y)}\hat{P}_j(z) - \sum_{j,i=0}^{h-1} c_{ij}^{(n} \overline{\phi_n(y,i)}\phi_n(z,j)$$

fórmula de sumación, generalización de la S-1 obtenida para PO sobre la circunferencia unidad en [1] (ver también [6] y [10]).

Otra forma de obtener una fórmula de sumación consiste en estudiar directamente la descomposición según (1) del polinomio $\left[\overline{A(y)}A(z) - R^2\right]K_{n-h}(z,y)$. Haciendo uso de las fórmulas de recurrencia ( ver [8] y [9] ) y tras operaciones adecuadas se deduce (S-II) :

$$\left[R^{-2}\overline{A(y)}A(z) - 1\right]K_{n-h}(z,y) = \sum_{n-2h+1}^{n-h} \overline{\widehat{AP}_j(y)}\,\widehat{AP}_j(z) - \sum_{i,k=0}^{h-1} c_{ik}^{(n-h} \overline{\phi_{n-h}(y,i)}\,\phi_{n-h}(z,k)$$

generalización de la fórmula S-2 de [1] .

<u>NOTAS</u>. 1.- (S-I) y (S-II) pueden deducirse directamente una de otra mediante un cálculo sencillo, haciendo uso de las fórmulas de recurrencia.

2.- Si en (S-I) hacemos $y = z$ queda:

$$\left[R^{-2}|A(z)|^2 - 1\right]K_{n-h}(z,z) = \sum_{n-h+1}^{n} |\hat{P}_j(z)|^2 - H_n(z) \qquad (2)$$

donde $H_n(z)$ es la forma cuadrática definida positiva:

$$\sum_{i,j=0}^{h-1} c_{ij}^{(n} \overline{\phi_n(z,i)}\,\phi_n(z,j)$$

De esta expresión se sigue que:

z es exterior a L $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n-h+1}^{n} |\hat{P}_j(z)|^2 > H_n(z)$

z es interior a L $\Longleftrightarrow$ " " " $< H_n(z)$

z e L $\Longleftrightarrow$ " " " $= H_n(z)$.

En particular si z es exterior a L se tiene que $K_n(z,z) > H_n(z)$ y si z es interior a L se verifica que $H_n(z) > |\hat{P}_n(z)|^2$.

3.- De la nota an-terior se deduce:

a) Si $z$ es interior a L $|\hat{P}_n(z)| \leq \|\Psi_n\|_2 \|\Phi_n\|_2$ donde $\Psi_n$ y $\Phi_n$ representan, respectivamente los vectores $(\psi_n(y,j))$, $(\phi_n(z,j))$.

b) Si $z$ es interior a L $|\hat{P}_n(z)| < \sum_{i=0}^{n} \sqrt{c_{ii}^{(n}} \, |\phi_n(z,i)|$. Si en particular hacemos $z = \alpha_j$, raíz de A(z), resulta $|\hat{P}_n(\alpha_j)|^2 < c_{jj}^{(n}$.

4.- Si $z_0$ es raíz de los h polinomios consecutivos $\hat{P}_j(z)$ con $j=n-h+1,\ldots,n$ entonces $z_0$ es interior a L ó es punto singular de la forma $H_n(z)$, en cuyo caso $z_0 \in L$. Recíprocamente, si $z_0$ es punto singular de $H_n(z)$ entonces $z_0$ es exterior a L ó es raíz de los polinomios $\hat{P}_j(z)$ con $j=n-h+1,\ldots,n$ y en este caso, $z_0 \in L$.

5.- A partir de (2) se sigue que:

$z$ exterior a L $\Longrightarrow |\hat{P}_n(z)|^2 - |\hat{P}_{n-h}(z)|^2 > H_n(z) - H_{n-1}(z)$

$z$ interior a L $\Longrightarrow |\hat{P}_n(z)|^2 - |\hat{P}_{n-h}(z)|^2 < H_n(z) - H_{n-1}(z)$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] ALFARO,M. "Teoría paramétrica de polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad" Rev.Acad.Ci.Zaragoza (2) 29 (1974) 5-79.

[2] ALFARO,M.
MARCELLAN,F. "Expresiones de interpolación para Po sobre cassinianas". Comunicación a las V Jornadas Mat. Luso-Españolas. Aveiro,1978.

[3] ATENCIA,E. "PO relativos a la lemniscata de Bernouilli" (Tesis doctoral) Zaragoza, 1974.

[4] FREUD,G. Orthogonal polynomials. Pergamon Press, 1971.

[5] MARCELLAN,F. "PO sobre cassinianas" (Tesis doctoral) Zaragoza, 1976.

[6] GERONIMUS, YA.L. Orthogonal polynomials in the unit circle Consultants Bureau, 1961.

[7] MARCELLAN,F. "Estudio de una base de $(A\Pi_{n-h})^{\perp}$ " Actas de IV Jorn.Mat.Hisp.-Luaas.p.97-110. Zaragoza,1980.

[8] MARCELLAN,F. "Una nota sobre relaciones de recurrencia para PO sobre cassinianas" Comunicación al ICM. Helsinki,1978.

[9] MARCELLAN,F. "Expresiones de recurrencia para PO sobre cassinianas" Comunicación a V Jorn.Mat.Luso-Españolas Aveiro,1978.

[10] SZEGÖ,G. Orthogonal polynomials. Coll.Pub. n° 23 AMS.1966