Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

EL SEMIGRUP CARACTERÍSTIC D'UN ESPAI QUOCIENT SEPARAT

Joan Tarrés i Freixenet

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid

ABSTRACT

According the definition of the characteristic semigroup of a Hausdorff topological space given by S. B. O'Reilly, we calcule the characteristic semigroup of a Hausdorff quotient space X/R for different classes of equivalence relations on X.

=====================

A (2) hom defineix el semigrup caracteristic d'un espai topològic de Hausdorff X com el conjunt $S(X) = \{A \subset X \times X$; A és tancat a $X \times X$ i $r(A)$ compacte a $X\}$ on $r(A) = \{y \in X$; existeix $x \in X$, $(x,y) \in A\}$ respecte de la composició de relacions. Igualment, a (2) es prova que dos espais topologics T_2 són homeomòrfes si i només si els seus semigrups caracteristics són isomorfes.

En aquest treball hom calcula el semigrup caracteristic d'un espai topologic quocient separat X/R respecte de diferents tipus de relacions d'equivalencia sobre l'espai de Hausdorff X i la seva relació amb el semigrup caracteristic de l'espai X.

Tenim com a primr resultat:

<u>LEMA 1</u> .- Tota aplicació propia i exhaustiva $f: X \longrightarrow Y$ entre dos espais topologics separats indueix un epimorfisme φ entre els semigrups caracteristics $S(X)$ i $S(Y)$ de manera que si $A \in S(X)$ és $\varphi(A) = \{(f(x),f(y))\,;(x,y) \in A\}$.

Si R és una relació d'equivalencia sobre l'espai de Hausdorff X de manera que l'aplicacio canonica $\pi : X \longrightarrow X/R$ és una aplicacio propia tenim, doncs, l'epimorfisme $\varphi : S(X) \longrightarrow S(X/R)$ d'acord amb el lema 1.

Considerem ara a $S(X)$ la relació d'equivalencia $A \sim B$ si és $sat_{R\times R}(A) = sat_{R\times R}(B)$ i sigui $T(X) = S(X)/\sim$ el corresponent conjunt quocient. Ara, la composició de relacions a $S(X)$ és compatible amb la relació $\sim$ i per tant podem considerar el semigrup $(T(X),.)$ de manera que l'aplicació natural $p: S(X) \longrightarrow T(X)$ és un epimorfisme de semigrups.

TEOREMA 1.- Si R és una relació d'equivalencia a l'espai de Hausdorff X tal que $\pi : X \longrightarrow X/R$ és una aplicació propia, els semigrups $T(X)$ i $S(X/R)$ són isomorfes.

Si X és compacte i X/R és T_2 aleshores $\pi : X \longrightarrow X/R$ és propia i además $R \in S(X)$ i si és $L_R(X) = \{ R.A.R; A \in S(X) \}$ s'acompleix:

TEOREMA 2.- Si X és compacte i R una relació d'equivalencia a X tal que X/R és T_2, els semigrups $L_R(X)$ i $S(X/R)$ són isomorfes.

En el cas en que R és una relació d'equivalencia arbitraria a X i l'espai X/R és T_2 hom defineix:

$$K(X) = \{ A \subset X\times X \ ; \ A \text{ saturat per } R\times R, \ (\pi \times \pi)(A) \text{ tancat a } X/R \times X/R \text{ i } \pi(r(A)) \text{ compacte a } X/R \}$$

i podem veure que $(K(X),.)$ és un semigrup.

TEOREMA 3.- L'aplicació $\varphi: K(X) \longrightarrow S(X/R)$ donada com a $\varphi(A) = \{ (\pi(x), \pi(y)) \ ; \ (x,y) \in A \}$ és un isomorfisme de semigrups.

Si R és una relació oberta, definim:

$$K^*(X) = \{ A \subset X \times X \ ; \ A \text{ tancat a } X \times X \text{ i saturat per } R \times R \text{ amb } \pi(r(A)) \text{ compacte a } X/R \}$$

i tenim:

TEOREMA 4.- Si R és oberta, hi ha un isomorfisme entre els semigrups $K^*(X)$ i $S(X/R)$.

================

REFERENCIES

(1). GARCIA MARRERO, M. i altres. TOPOLOGIA. Ed. Alhambra. Madrid
(2). O'REILLY, B. THE CHARACTRISTIC SEMIGROUP OF A TOPOLOGICAL SPACE. General Topology and its applications. 5(1975) 95-106.