Pub. Mat. UAB
N°21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

LA NORMALIDAD DE UN ESPACIO TOPOLOGICO NO ES UNA PROPIEDAD LOCAL

Manuel López Pellicer

Cátedra de Matemáticas
ETSI Agrónomos de Valencia

ABSTRACT

M. Valdivia and M. López have obtained in (4) and (3) - completely regular topological spaces whose associated k-spaces are not regular. Here we prove that these k-spaces are such - that every point admits a neighbourhood which, endowed with the induced topology, is normal.

J.L. Blasco demostró en (1) que un espacio topológico - regular en que cada punto tenga un entorno completamente regular, respecto a la topología inducida, es completamente regular. No se puede prescindir de la regularidad en esta proposición,- pues, utilizando los ejemplos dados en (3) y (4) vamos a probar la existencia de espacios topológicos no regulares en que cada punto posee un entorno normal. Reproduciremos, en parte, el ejemplo dado en (4) para facilitar la lectura de esta comunicación.

EJEMPLO. Sea ω_0 el primer ordinal infinito, ω_1 el primer - ordinal de cardinal no numerable y (E,U) el espacio topológico producto de $([1,\omega_1),T_\leq)$ por $([1,\omega_0),T'_\leq)$, donde $T_\leq$ y $T'_\leq$ son las topologías del orden usual en los ordinales.

Por definición de ω_1 se puede encontrar para cada ordinal límite $\alpha\in[1,\omega_1[$ una sucesión estrictamente creciente de ordinales numerables $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, que es $T_\leq$-convergente a α. Las mismas propiedades tiene la sucesión de ordinales aislados $\{\alpha_n=\beta_n+1\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $A_{\alpha p}=\{(\delta,p):\alpha_p<\delta\leq\alpha\}$ y $U_{\alpha n}=\{(\alpha,\omega_0)\}\cup\{\bigcup_{p=n}^{\infty}A_{\alpha p}\}$.

Sea J la topología en E que tiene por subbase los abiertos de U y los conjuntos $U_{\alpha n}$, con α un ordinal límite cualquiera de $[1,\omega_1[$ y $n=1,2,\ldots$. Los J-abiertos $U_{\alpha n}$ son J-compactos por la coincidencia de las topologías U y J en $[1,\omega_1]\times[1,n]$, con $n\in\mathbb{N}$.

Se tiene, pues, que el subespacio de (E,J) de conjunto soporte $E-\{(\omega_1,\omega_0)\}$ es localmente compacto. Si J_k es la k-topología asociada a J, se tiene, por (2)-p.274-K, que $E-\{(\omega_1,\omega_0)\}$ es un subespacio localmente compacto de (E,J_k).

Dado un J_k-entorno V de (ω_1,ω_0) se pueden determinar dos ordinales $\alpha\in[1,\omega_1[$ y $n\in[1,\omega_0[$ tales que

$$(\,[\alpha\,,\,\omega_1\,]\times[n\,,\,\omega_0[\,\,)\cup\{(\,\omega_1\,,\,\omega_0\,)\}\subset V \qquad [1]$$

pues las topologías U, J, y J_k coinciden en $\{\omega_1\}\times[1,\omega_0]$ y $[1,\omega_1]\times\{n\}$ y, además, el supremo de una familia numerable de ordinales numerables es un ordinal numerable.

La topología J induce en $[1,\omega_1[\times\{\omega_0\}$ la topología discreta, por lo que $E_o=E-\{[1,\omega_1[\times\{\omega_0\}\}$ es un J_k-entorno de (ω_1,ω_0). J_k induce en E_o una topología normal, pues si F_1 y F_2 son dos J_{k/E_o} cerrados disjuntos, lo que nos permite suponer que $(\omega_1,\omega_0)\notin F_1$ y, por [1], que existen dos ordinales $\alpha\in[1,\omega_1[$ y $n\in[1,\omega_0[$ tales que $E_1=$ $=([\alpha+1,\omega_1[\times[n\,,\omega_0[)\cup\{(\omega_1,\omega_0)\}$ no corta a F_1. La normalidad de $(E_o,J_{k/E_o})$ se deduce de que E_1 y $E-E_1$ están separados, y de que E_o-E_1 es normal (es la unión de un metrizable y un compacto separados).

Hemos obtenido que cada punto de (E,J_k) tiene un entorno que con la topología inducida por J_k es normal. Se prueba en (4) que (E,J_k) no es regular, pues por [1] se tiene que E_o no contiene ningún entorno cerrado V de (ω_1,ω_0), pues $(\alpha\;,\omega_0)\in$ $\in\overline{V}-E_o$.

NOTA.- Análogamente se prueba que el k-espacio no completamente regular k-R determinado en (3) es localmente normal. El lema de (1) implica que k-R no es regular.

BIBLIOGRAFIA

(1) Blasco Olcina J.L.-"Sobre una clase de espacios regulares no completamente regulares". Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid. T LXVIII, cuad. 3º (1974), 547-555.

(2) Kelley J.L.-"Topología general". Eudeba, Buenos Aires - (1962).

(3) López Pellicer M.-"Un ejemplo de un espacio completamente regular que el k-espacio correspondiente no es completamente regular". Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid. T. LXVIII, cuad. 1º, (1974), 111-118.

(4) Valdivia M.-"On certain topologies on a vector space".Manuscripta Math. 14, (1974), 241-247.