Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE EL NOMBRE DE PUNTS FIXOS PER A UNA APLICACIÓ D'UN GRAF CONNEX FINIT

Jaume Llibre, Agustí Reventós

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract. Let F_n be the quotient space of $[o,n]$ obtained by identifying points of integers coordinates to a single point. We ask the following question: if $f: F_n \to F_n$ is a continuous map what can be said about the number of fixed points of f? We give a complete answer to this question in the homotopy classes of continuous maps of F_n into itself. Also, we show the relations let ween our answer and the Nielsen number. For a continuous map $f: K \to K$. where K is a finite connected graph, we give a partial answer to the above question.

Resum. Sigui F_n l'espai obtingut a partir de l'interval tancat $[0,n]$ identificant tots els punts de coordenada entera a un únic punt p. Sigui $f: F_n \to F_n$.

Definirem aquí un número m(f) facilment calculable a partir del coneixement de f a nivell de 1er grup d'homotopia i de saber si p és o no punt fix de f.

Demostrarem que f té com a mínim m(f) punts fixos i relacionarem m(f) amb el número de Nielsen N(f).

Donem a continuació un mínim de notació i els resultats més interesants. Sigui X_j l'espai quocient de l'interval $[j-1.j]$ al identificar amb p els punts j-1 i j, i sigui $\tau_j:[j-1,j] \to X_j$ l'aplicació definida per aquesta identificació. F_n és homeomorf a la unió de n cercles $X_1 \dots X_n$ que es tallen en un punt p i només en aquest punt.

El grup fonamental de F_n amb base p, $\pi(F_n,p)$, és isomorf al grup lliure de n generadors. Aquests generadors estan representats pels llaços τ_j.

Si $f:F_n \to F_n$ i $p \neq f(p) \in X_j$ denotem per $\gamma:[0,1] \to X_j$ el camí tal que $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=f(p)$ i $\gamma([0,1])$ és l'arc tancat entre p i f(p) recorregut en el sentit contrari a les agulles del reflotge. Pendrem com a generadors de $\pi(F_n,f(p))$ les classes $\{\gamma^{-1}\tau_j\gamma\}$ $1 \leq j \leq n$.

Llavors f a nivell d'homotopia, queda coneguda a partir de les expressions

$$f_*\{\tau_j\} = \{\gamma^{-1}\ \tau_{j,1}^{a(j,1)} \cdots \tau_{j,m(j)}^{a(j,m(j))}\gamma\} \quad 1 \leq j \leq n$$

on $f_*: \Pi_1(F_n,p) \to \Pi_1(F_n,f,p))$ és l'aplicació induïda per f, $\tau_{j,K} \in \{\tau_1,\dots,\tau_n\}$, i dos llaços consecutius $\tau_{j,K}$ són sempre diferents.

r_j serà la retracció de F_n a X_j que envía $F_n - X_j$ a p.

A cada aplicació continua $f: F_n \to F_n$ hi associem un enter no negatiu M(f) definit per $M(f) = \sum_{j=1}^{n}{}' M_j(f)$

on

$$M_j(f) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m(j)} M_j^k(f) & \text{si} \quad f_*\{\tau_j\} \neq \{\gamma^{-1}\gamma\} \\ 1 & \text{si} \quad f_*\{\tau_j\} = \{\gamma^{-1}\gamma\} \quad \text{i} \quad r_j f(p) \neq p \\ 0 & \text{si} \quad f_*\{\tau_j\} = \{\gamma^{-1}\gamma\} \quad \text{i} \quad r_j f(p) = p \end{cases}$$

Els enters $M_j^K(\ )$ estan definits a la taula adjunta.

La notació Σ' significa:

$$\sum_{j=1}^{n}{}' M_j(f) = \begin{cases} 1 + \sum_{j=1}^{n} M_j(f) & \text{si } f(p) = p \\ \sum_{j=1}^{n} M_j(f) & \text{si } f(p) \neq p \end{cases}$$

A continuació demostrem que si g és homotopa a f, llavors M(g)-M(f) $\in \{-2,-1,0,1,2\}$. Denotem per m(f) l'infim dels nombres M(g), on g és homotopa a f. Obtenim els seguents resultats:

<u>Teorema A</u>. Sigui $f: F_n \to F_n$ una aplicació continua. Llavors

a) f té al menys m (f) punts fixos.

b) Si g és homotopa a f, m(g) = m(f).

c) Existeix g homotopa a f i tal que g té exactement m(f) punts fixos.

d) $N(f) \leq m(f)$ on N(f) és el número de Nielsen de f.

NOTA: Els punts fixos de $f: F_n \to F_n$ es classifiquen segons la relació d'equivalencia següent: x equivalent a y si i sols si existeix un camí $C: [01] \to F_n$ amb $C(0) = x$ i $C(1) = y$ tal que C i fC són homotops. Aquestes classes tenen associat ún cert "index" i el número de Nielsen és el nombre de classes d'equivalencia d'index $\neq 0$.

Teorema B: Sigui $f: F_1 \to F_1$ una aplicació continua. Llavors $N(f) = m(f)$.

Exemple C: Existeix una aplicació continua $f: F_2 \to F_2$ tal que $N(f) < m(f)$

Teorema D: Sigui $f: F_n \to F_n$ una aplicació continua. Suposem $f_*\{\tau_j\} = \{\gamma^{-1}\tau_j^{a(j)}\gamma\}$ per a tot $j = 1..n$, on $a(j)$ és un enter. Llavors $N(f) = m(f)$.

Si K és un graf connex finit i $f: K \to K$ és continua, definim de manera semblant un número $M'(f)$ i demostrem que f té com a mínim $M'(f)$ punts fixos i que si g és homotopa a f, llavors $M'(g) = M'(f)$.

m	k	τ	f	$a(j,k)$	$M_j^k(f)$
$m = k = 1$		$\tau_{j,k} = \tau_j$	$f(p)=p$	> 2	$\lvert 2-a(j,k)\rvert$
				$0,1,2$	0
				< 0	$\lvert a(j,k)\rvert$
			$r_j f(p) \neq p$		$\lvert 1-a(j,k)\rvert$
			$f(p) \notin X_j$		$\lvert a(j,k)\rvert$
		$\tau_{j,k} \neq \tau_j$	$r_j f(p) \neq p$		1
			$r_j f(p) = p$		0
$m > 1$	$k = 1$	$\tau_{j,k} = \tau_j$	$f(p)=p$	> 0	$\lvert 1-a(j,k)\rvert$
				< 0	$\lvert a(j,k)\rvert$
			$r_j f(p) \neq p$		$\lvert 1-a(j,k)\rvert$
			$f(p) \notin X_j$		$\lvert a(j,k)\rvert$
		$\tau_{j,k} \neq \tau_j$	$r_j f(p) \neq p$		1
			$r_j f(p) = p$		0
	$k = m$	$\tau_{j,k} = \tau_j$	$f(p)=p$	> 0	$\lvert 1-a(j,k)\rvert$
			otherwise		$\lvert a(j,k)\rvert$
		$\tau_{j,k} \neq \tau_j$			0
	$k \notin \{1,m\}$	$\tau_{j,k} = \tau_j$			$\lvert a(j,k)\rvert$
		$\tau_{j,k} \neq \tau_j$			0