

EXTENSIONES COFIBRACION-FIBRACION

L.J. Hernández Paricio

Dpto. de Geometría y Topología
 Universidad de Zaragoza

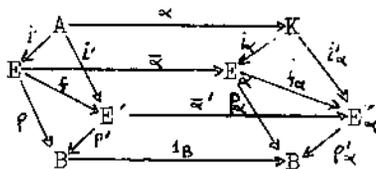
Llamamos extensión cofibración-fibración de A por B, a una sucesión exacta corta $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$, tal que i es cofibración y p es fibración (respecto a la teoría de homotopía inducida por un anillo R en los grupos abelianos). Si B (A) tiene una (co)presentación contractil, damos un teorema de clasificación homotópica de las extensiones cofibración-fibración (salvo isomorfismo). Estudiamos las sucesiones exactas largas asociadas y analizamos el caso $R=\mathbb{Q}$.

INTRODUCCION.- En (4), para un anillo R, hemos definido en los grupos abelianos una teoría de homotopía, hemos estudiado propiedades de cofibraciones y fibraciones y construido sucesiones homotópicas; aquí utilizando los resultados de (4), estudiamos el functor $CF(B,A)$. Así como en (6), se da una clasificación homotópica de los G-fibrados principales y en (3) (5) se hace un estudio de $Ext(B,A)$ a través de adecuadas presentaciones, nosotros hacemos una clasificación homotópica de las extensiones cofibración-fibración (salvo isomorfismo), que denotamos $CF(B,A)$, utilizando (co)presentaciones contractiles (cuando existen). Si el anillo que consideramos es \mathbb{Q} , probamos que si B es divisible, admite una presentación contractil $\Omega B \rightarrow B \xrightarrow{\mathbb{Q}} B$ y en este caso $CF(B,A) = [\Omega B, A]$. Si A es de cotorsión y libre de torsión, tiene una copresentación contractil $A \rightarrow A \otimes \mathbb{Q} \rightarrow SA$, entonces $CF(B,A) = [B, SA]$, además $CF(B,A) = Ext(B,A)$.

A continuación, recogemos los teoremas más importantes, dejando al lector el enunciado de los correspondientes duales. Con \mathcal{A} denotamos la categoría de los grupos abelianos.

EXTENSIONES COFIBRACION-FIBRACION. Vamos a considerar la categoría $\mathcal{E}\mathcal{F}(B,A)$, que tiene como objetos las CF-extensiones de A por B (extensiones cofibración-fibración), $u=(A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B)$, $u'=(A \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} B)$ y como morfismos $f:u \rightarrow u'$; homomorfismos $f:E \rightarrow E'$ tal que $fi=i'$, $p'f=p$. Es inmediato probar que todo morfismo de $\mathcal{E}\mathcal{F}(B,A)$ es isomorfismo.

Para un homomorfismo $\alpha:A \rightarrow K$, definimos un functor $\alpha_*:\mathcal{E}\mathcal{F}(B,A) \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{F}(B,K)$, del modo siguiente, sea $f:u \rightarrow u'$ y consideremos el siguiente diagrama:

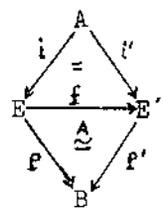


construido, a través de los cuadrados cocartesianos determinados por α e i primero, y α e i' después, $f_\alpha = i'_\alpha \circ f$, entonces $\alpha_*(u \xrightarrow{f} u') = u_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} u'_\alpha$ siendo $u_\alpha = (K \xrightarrow{i_\alpha} E_\alpha \xrightarrow{p_\alpha} B)$ y $u'_\alpha = (K \xrightarrow{i'_\alpha} E'_\alpha \xrightarrow{p'_\alpha} B)$.

Definición. Sean u, v dos CF-extensiones de A por B, diremos que son equivalentes si existe un isomorfismo $f:u \rightarrow v$. Denotaremos por $CF(B,A)$ las CF-extensiones de A por B, salvo isomorfismo.

Notemos que el functor α_* lo podemos considerar de modo natural como una correspondencia $CF(B,A) \rightarrow CF(B,K)$.

Lema. Consideremos el siguiente diagrama:



tal que p' es cofibración, $pi=p'i'$, $fi=i'$, $p \stackrel{A}{\simeq} p'f$ entonces existe $f': E \rightarrow E'$ tal que $f' \stackrel{A}{\simeq} f$ y $p'f'=p$.

Ayundndonos de este lema podemos probar la siguiente proposición:

Proposición. - Sean $\alpha, \alpha' : A \rightarrow K$ tal que $\alpha \sim \alpha'$ entonces $\alpha_* = \alpha'_* : CF(B, A) \rightarrow CF(B, K)$.

Definición. - Sea $B \in |\mathcal{A}|$ diremos que $\sum_B = (N_B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} B)$ es una presentación contractil de B , si \sum_B es una CF-extensión de A por B y C es contractil.

Despues demostramos el siguiente teorema de clasificación

Teorema. - Sea $B \in |\mathcal{A}|$ y supongamos que B tiene una presentación contractil $\sum_B = (N_B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{q} B)$ entonces la correspondencia $\Psi : [N_B, A] \rightarrow CF(B, A)$ tal que $\Psi[\alpha] = \alpha_* [I_B]$ es una equivalencia natural, en la segunda variable. La inversa $\Psi : CF(B, A) \rightarrow [N_B, A]$ se define del siguiente modo $\Psi[A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B] = [\hat{e}]$ siendo $e: C \rightarrow E$ una elevación de q a través de p , $pe=q$ y \hat{e} el homomorfismo inducido en los conúcleos, único tal que $i\hat{e}=ej$.

Un corolario inmediato es la existencia de la siguientes sucesiones exactas.

Corolario. - Sea $B \in |\mathcal{A}|$ y supongamos que B tiene una presentación contractil, sea un homomorfismo $g: X \rightarrow Y$ y $\dots \rightarrow \Omega Y \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} X \xrightarrow{g} Y$ la sucesión de Eckmann-Hilton asociada a g , entonces la siguiente sucesión es exacta para $n \geq 1$.

$$\dots \rightarrow CF(B, \Omega^n Y) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} F) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} X) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} Y) \rightarrow$$

Si además g es una fibración con núcleo $F \xrightarrow{i} X$ y sucesión de fibras homotópicas asociada $\dots \rightarrow \Omega Y \xrightarrow{A} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{g} Y$ la siguiente sucesión es exacta para $n \geq 1$.

$$\dots \rightarrow CF(B, \Omega^n Y) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} F) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} X) \rightarrow CF(B, \Omega^{n-1} Y) \rightarrow$$

Por último aseguramos que estas sucesiones son naturales respecto pares de homomorfismos como los siguientes:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\xi} & Y \\
 \downarrow \alpha & \cong & \downarrow \beta \\
 X' & \xrightarrow{\xi'} & Y'
 \end{array}$$

Ejemplos. - Para $R=Q$, si B es divisible admite la siguiente presentación contractil $\Omega B \rightarrow B \xrightarrow{Q} B$, $\Omega B = \text{Hom}(S, B)$ $S=Q/\mathbb{Z}$, entonces $CF(B, A) = [\Omega B, A]$. Podemos ver que $CF \neq \text{Ext}$ ya que $CF(Q, \mathbb{Z}) \neq \text{Ext}(Q, \mathbb{Z})$, $CF(Q, \mathbb{Z})=0$ por ser Q contractil, y $\text{Ext}(Q, \mathbb{Z}) \cong R$. Si A es de cotorsión entonces $CF(B, A) \cong \text{Ext}(B, A)$, si además A es libre de torsión $A \rightarrow A \otimes Q \rightarrow A \otimes S$ es una copresentación contractil, entonces $\text{Ext}(B, A) \cong CF(B, A) = [B, A \otimes S]$. Si tomamos $B=S^p = \mathbb{Z}(p^\infty)$ y $A=J_p$ enteros p -adicos, entonces:

$$\text{Ext}(S^p, J_p) \cong CF(S^p, J_p)$$

$$CF(S^p, J_p) \cong [\Omega S^p, J_p] \cong [J_p, J_p] \cong \text{Hom}(J_p, J_p) \cong J_p$$

$$CF(S^p, J_p) \cong [S^p, J_p \otimes S] \cong \text{Hom}(S^p, J_p \otimes S)$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) Cartan, H.; Eilenberg, S: Homological Algebra. Princeton University Press (1956).
- (2) Dieck, T. tom; Kamps, K.H.; Puppe: Homotopietheorie. Lecture Notes in Mathematics. No 157. Springer-Verlag (1970)
- (3) Fuchs, L: Infinite Abelian Groups. Academic Press(1970)
- (4) Hernandez, L. J.: Un Ejemplo de Teoría de Homotopía en Grupos Abelianos (por aparecer)
- (5) Hilton, P.J.; Stammach, U.: A course in Homological Algebra, GTM 4, Springer-Verlag (1971).
- (6) Husemoller, D.: Fibre Bundles. Mc Graw-Hill(1966).