Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD DE UNA ESTRUCTURA J SATISFACIENDO $(J^2-p^2)(J^2+q^2)=0$

J. Martínez, E. Reyes, M.E. Piñeiro

Dpto. de Física Teórica
Universidad de Valladolid

Abstract.- We consider the structures defined by a tensor field J of type (1,1) which satisfy the condition $(J^2-p^2)(J^2+q^2)=0$ characterizing its integrability in term of its Nijenhuis tensor.

1.- Preliminares.- Sea M^n una variedad diferenciable n-dimensional de clase C^∞ y un campo tensorial J de tipo (1,1) definido sobre M^n, verificando: $(J^2-p^2)(J^2+q^2)=0$ y las demás condiciones dadas en [2] salvo que aquí consideraremos $p,q \in \mathbb{R}$. Para este campo tensorial pueden definirse, [2] operadores l y m de proyección complementaria satisfaciendo: (1,1) $J^2 l = p^2 l$; $J^2 m = -q^2 m$. Sean L y M las distribuciones complementarias correspondientes a l y m respectivamente, de dimensiones r_1+r_2 y $2s$.

En [2] se ha probado que una condición necesaria y suficiente para que una variedad n-dimensional admita un tal campo tensorial J de tipo (1,1) es que el grupo de fibrado tangente de la variedad se reduzca al grupo $O(r_1) \times O(r_2) \times U(s)$ donde $U(s)$ denota la representación real del grupo unitario de orden s.

2.- Tensor de Nijenhuis.

El tensor de Nijenhuis de J es:

$$N(X,Y) = [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] + J^2[X,Y]$$

cualesquiera que sean X e Y, campos vectoriales de M^n.

En nuestro caso puede expresarse, del modo usual [1] :

$$(2.1)\quad N(X,Y) = lN(lX,lY) + mN(lX,lY) + N(lX,mY) + N(mX,lY) + lN(mX,mY) + mN(mX,mY).$$

Si la distribución L es integrable $N(lX,lY)$ es exactamente el tensor de Nijenhuis de $J|_L$. Si la distribución M es integrable, $N(mX,mY)$ es el tensor de Nijenhuis de $J|_M$.

La derivada de Lie $\mathcal{L}_Y J$ del campo tensorial J respecto a un campo vectorial Y, es por definición, un campo tensorial del mismo tipo que J y dado por:

$$(\mathcal{L}_Y J)X = J[X,Y] - [JX,Y]$$

Se obtiene entonces:

$$(2.2)\qquad N(lX,mY) = J(\mathcal{L}_{mY}J)lX - (\mathcal{L}_{JmY}J)lX$$

$$(2.3)\qquad N(mX,lY) = J(\mathcal{L}_{lY}J)mX - (\mathcal{L}_{JlY}J)mX$$

3.- <u>Condiciones de integrabilidad</u>.- Como es bien conocido la distribución L es integrable si y sólo si $m[lX,lY] = 0$.

Proposición 3.1.- Una condición necesaria y suficiente para que la distribución L (M) sea integrable es que $mN(lX,lY)=0$ ($lN(mX,mY)=0$) para dos campos vectoriales cualesquiera X e Y.

La prueba se realiza teniendo en cuenta la definición del tensor de Nijenhuis y las relaciones (1,1), escribiendo

$$mN(lX,lY)=m[JlX,JlY]-mJ[JlX,lY]-mJ[lX,JlY]+J^2m[lX,lY] =$$
$$=m[lJX,lJY]-mJ[lJX,lJ]-mJ[lX,lJY]+J^2m[lX,lY]$$

Puesto que L es integrable, todos los corchetes pertenecen a L, luego se anula cada término de la expresión anterior, llegándose al resultado $m\,N(lX,lY) = 0$

La proposición recíproca se demuestra desarrollando

$N(JlX,JlY)$, $N(JlX,lY)$, $N(lX,JlY)$, considerando que $mN(JlX,JlY) = mN(JlX,lY) = mN(lX,JlY) = 0$, ya que por hipótesis $mN(lX,lY) = 0$ y operando con estas expresiones, teniendo en cuenta las relaciones (1,1) se llega a $m[lX,lY] = 0$ que es condición necesaria y suficiente para que L sea integrable.

Proposición 3.2.- Una condición necesaria y suficiente para que ambas distribuciones L y M sean integrables es que:

$$N(X,Y) = lN(lX,lY) + N(lX,mY) + N(mX,lY) + mN(mX,mY).$$

Es consecuencia de (2.1) y de la Proposición 3.1.

Supongamos ahora que la distribución L es integrable, entonces el operador dado por la expresión $J' = (J/p)|_L$ induce sobre cada variedad integral de L una estructura casi producto. Como dicha estructura es integrable si y solamente si su tensor de Nijenhuis se anula identicamente, tenemos:

Proposición 3.3.- Si la distribución L es integrable, una condición necesaria y suficiente para que la estructura casi producto definida por $J'=(J/p)|_L$ sobre cada variedad integral de L, sea integrable es que $N(lX,lY) = 0$ ó equivalentemente $lN(lX,lY)=0$ para todo par de campos vectoriales X e Y.

Supongamos ahora que la distribución M es integrable, entonces $J'' = (J/q)|_M$ induce sobre cada variedad integral de M una estructura casi compleja. Como tal estructura es integrable si y solamente si su tensor de Nijenhuis se anula identicamente, obtenemos:

Proposición 3.4.- Si la distribución M es integrable, una condición necesaria y suficiente para que la estructura casi compleja definida por $J''=(J/q)|_M$ sea integrable, es que $N(mX,mY)=0$, o equivalentemente $mN(mX,mY)=0$, para todo par de campos vectoriales X e Y.

Definición 3.1.- Diremos que la estructura J es parcialmente integrable si se verifican simultaneamente las condiciones de las proposiciones 3.3 y 3.4.

Proposición 3.5.- Una condición necesaria y suficiente para que la estructura J sea parcialmente integrable es que $N(X,Y) = N(lX,mY)+N(mX,lY)$ para todo par de campos vectoriales X e Y.

4.- Condiciones $N(lX,mY)=0$ y $N(mX,lY)=0$.- Se razona de manera semejante a la empleada en [1], según el esquema siguiente:

De (2.2) se deduce que $N(lX,mY)=0$ si y solamente si $J(\mathcal{L}_{mY}J)lX = (\mathcal{L}_{JmY}J)lX$, de donde $J^2 l(\mathcal{L}_{mY}J)lX = -q^2 l(\mathcal{L}_{mY}J)lX$, luego $(p^2+q^2)l(\mathcal{L}_{mY}J)lX=0$, y se llega $l(\mathcal{L}_{mY}J)l=0$ para todo campo vectorial Y

De forma análoga partiendo de $N(mX,lY)=0$ se obtiene

$$m(\mathcal{L}_{lY}J)m = 0, \quad \text{para todo campo vectorial } Y.$$

Si L y M son integrables y el campo tensorial $l(\mathcal{L}_{mY}J)l \quad m(\mathcal{L}_{lY}J)m$ se anula identicamente para todo campo vectorial Y, obtenemos que los componentes de $J_{r_1+r_2}(J_{2s})$ de la estructura J son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de las variedades integrales de la distribución L(M) en un sistema de coordenadas adaptadas. Se comprueba facílmente que lo recíproco tambien se verifica.

Proposición 4.1.- Se supone que L y M son integrables y que ha sido escogido un sistema de coordenadas adaptadas.

Una condición necesaria y suficiente para que las componentes locales $J_{r_1+r_2}(J_{2s})$ de la estructura J sean funciones independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de las variedades integrales de L(M) es que $N(lX,mY)=0$ ($N(mX,lY)=0$) para todo par de campos vectoriales X e Y.

Definición 4.1.- Se dice que la estructura J es integrable si:

I).-J es parcialmente integrable, es decir: $N(X,Y)=N(lX,mY)+N(mX,lY)$ y

II).-Las componentes $J_{r_1+r_2}(J_{2s})$ de la estructura J son independientes de las coordenadas que son constantes a lo largo de las variedades integrales de L(de M) en un sistema de coordenadas adaptadas.

Teorema 4.2.- Una condición necesaria y suficiente para que la estructura J sea integrable es que $N(X,Y)=0$ para todo par de campos vectoriales X e Y.

REFERENCIAS

[1] L. Cordero y P.M. Gadea: On integrability conditions of a structure φ satisfying $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$. Tensor N.S. 28,(1974), 78-82.

[2] J. Martinez, P.M. Gadea: Sobre ciertas estructuras polinómicas. VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas.1980.