Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

CONEXIONES DE ORDEN k

Manuel de León Rodríguez

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad de Santiago de Compostela

ABSTRACT

A connection of order k on a manifold M is a differentiable vector 1-form Γ on T^kM satisfying $J_1\Gamma = J_1$, $\Gamma J_k = -J_k$. Under some hipothesis, a derivation law ∇ in the $\mathcal{F}(T^kM)$-module $\mathfrak{X}(T^kM)$ induces on M a connection Γ of order k. We obtain the relationship between geodesics of ∇ and paths of Γ. Finally, we define the prolongations of a connection Γ on M to a connections Γ_k of order k.

COMUNICACION

§1.- Preliminares.

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional paracompacta. Denotamos por $\mathcal{F}(M)$ el álgebra de las funciones con valores reales en M, y por $\mathfrak{X}(M)$ el $\mathcal{F}(M)$-módulo de los campos de vectores en M. El fibrado tangente de orden k, T^kM, de M es la variedad de (k+1)n-dimensional de los k-jets en $0 \in R$ de aplicaciones diferenciables $f: R \longrightarrow M$. T^kM posee una estructura fibrada natural sobre M con proyección canónica π_k. T^1M no es más que el fibrado tangente TM de M. τ^kM será T^kM sin la sección nula, y $V^{\pi_k}(T^kM)$ el fibrado vectorial sobre T^kM constituido por aquellos vectores de TT^kM que se proyectan en 0 por π_k^T. Sea (U, x^i) un entorno coordenado de M; denotamos por $(y^{(0)i}, y^{(1)i}, \ldots, y^{(k)i})$ el sistema de coordenadas inducidas en $\pi_k^{-1}(U)$. Sean $J_1, J_2, \ldots, J_k$

los endomorfismos canónicos de T^kM; respecto a las coordenadas inducidas, se expresan localmente por

$$J_1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ I & 0 & . & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ I & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & I & . & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, J_k: \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ I & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & I & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & I & 0 \end{pmatrix}$$

Sea C_k el campo canónico de T^kM; en un punto de coordenadas $(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(k)})$ se expresa por

$$C_k = (0, y^{(1)}, 2y^{(2)}, \ldots, ky^{(k)})$$

C_k genera el grupo 1-paramétrico de las homotecias positivas de T^kM; por tanto, la homogeneidad de funciones y formas se caracteriza como sigue:

Una función f en T^kM, C^∞ en τ^kM (resp. una p-forma escalar ω, una 1-forma vectorial L) es homogénea de grado r ($h(r)$) si

$$\mathcal{L}_{C_k} f = r \cdot f \quad (\text{resp. } \mathcal{L}_{C_k} \omega = r\omega, \ [C_k, L] = (r-1)L).$$

§2.- Conexiones de orden k.

Definición.- Una conexión en M de orden k es una 1-forma vectorial Γ en T^kM, C^∞ en τ^kM, tal que

$$\Gamma J_k = -J_k \quad \text{y} \quad J_1 \Gamma = J_1 .$$

Si Γ es $h(1)$, la conexión se dice homogénea.

Una conexión Γ en M de orden k define una estructura casi-producto en T^kM. Así, existen dos proyectores asociados canónicamente a Γ

$$h = \frac{1}{2}(I+\Gamma), \quad v = \frac{1}{2}(I-\Gamma)$$

Si Γ es $h(1)$, los subespacios horizontales son invariantes por las homotecias positivas.

Si Γ es una conexión en M de orden k, se expresa localmente por la matriz:

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & . & 0 \\ -2\Gamma^{(1)} & -I & 0 & . & 0 \\ -2\Gamma^{(2)} & 0 & -I & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -2\Gamma^{(k)} & 0 & 0 & . & -I \end{pmatrix}$$

<u>Definición</u>.- Una curva σ en M se dice un <u>camino</u> de Γ si la prolongación k-ésima de σ a T^kM, $j^k\sigma$ es horizontal, i.e. $v\circ(j^k\sigma)' = 0$.

Si Γ es homogénea, sus caminos se denominan <u>geodésicas</u>. Los caminos de una conexión satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{1}{r!}\,\frac{d^{r+1}x^j}{dt^{r+1}} + \Gamma^{(r)j}_{\ \ i}\,\frac{dx^i}{dt} = 0\ , \qquad r=1,2,\dots,k.$$

§3.- <u>Leyes de derivación en $\mathfrak{X}(T^kM)$</u>.

<u>Definición</u>.- Una ley de derivación (LD) ∇ en $\mathfrak{X}(T^kM)$ se dice <u>regular</u> (LDR) si

1) $\nabla J_k = 0$
2) La aplicación ϕ: $V^{\Pi_k}(T^kM) \longrightarrow V^{\Pi_k}(T^kM)$
$\qquad x \longrightarrow \phi(x) = \nabla_x C_k$

es un isomorfismo.

Si además, $\phi = Id$, ∇ se dice <u>proyectable</u> (LDP).

ϕ no es más que la restricción de $\tilde{\phi}$: $T(T^kM) \longrightarrow V^{\Pi_k}(T^kM)$ definida por $\tilde{\phi}(x) = \nabla_x C_k$, a $V^{\Pi_k}(T^kM)$.

<u>Proposición</u>.- Si ∇ es una LDR en $\mathfrak{X}(T^kM)$, entonces $\Gamma = I - 2\phi^{-1}\circ\tilde{\phi}$ es una conexión en M de orden k, que se dice la <u>conexión inducida por ∇</u>. Si ∇ es una LDP, la conexión inducida Γ, se dice la <u>proyección</u> de ∇. La relación entre las geodésicas de ∇ y los caminos de Γ se establece en el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>.- (1) Sea ∇ una LDP en $\mathfrak{X}(T^kM)$ y Γ su proyección. Entonces, si $j^k\sigma$ es una geodésica de ∇, σ es un camino de Γ.

(2) Supongamos además $\nabla\Gamma = 0$. Entonces si σ es un camino de Γ, $j^k\sigma$ es una geodésica de ∇.

§4.- Prolongación de conexiones.

Sea Γ una conexión de orden 1 en M; si Γ es lineal (es decir, homogénea y de clase C^1 en la sección nula) Γ induce una LD en $\mathfrak{X}(M)$ (ver Grifone [2]). Sea ∇^* la prolongación de ∇ a $\mathfrak{X}(T^kM)$ en el sentido de Yano-Ishihara [3].

Proposición.- ∇^* es una LDR en $\mathfrak{X}(T^kM)$. Por lo tanto, ∇^* induce en M una conexión de orden k, Γ_k, la cual se dirá la prolongación k-ésima de Γ. Teniendo en cuenta las expresiones locales de Γ_k se demuestra que Γ_k es homogénea. Además Γ y Γ_k tienen las mismas geodésicas.

BIBLIOGRAFIA.-

[1] DE LEON, M., Connections and f-structures on T^2M. (to appear).

[2] GRIFONE, J., Structure presque-tangente et connexions, I et II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22, 1, (1972), 287-334; ibidem, 32, 3 (1972), 291-338.

[3] YANO, K., and ISHIHARA, S., Tangent and cotangent bundles, Marcel Dekker, New York, (1973).