Pub. Mat. UAB
N° 1980
Actes VII JMHL

A la memoria de mi padre

UNA PROPIEDAD DE LAS ALGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES CON FORMA DE KILLING INDEFINIDA

Francisco Jiménez Alcón

Dpto. de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla

Abstract.-

The real connected Lie Groups may be or not the reunion of their uniparametric subgroups. The aim of this note is to study a characterization of the Lie Groups such that are the reunion of their uniparametric subgroups. To begin with, it is proved that if G is a real connected semisimple Lie Group and the Killing form on the Lie Algebra of G is an indefinide form, G is not the reunion of their uniparametric subgroups. It is proved the next result: "Let G be a real connected Lie Group. G is the reunion of their uniparametric subgroups if and only if rad(G) is exponential and the Killing form on the Lie Algebra of G/rad(G) is a definide form (positive or negative)".

1. INTRODUCCION

De entre los grupos de Lie conexos, se pueden distinguir dos tipos: aquellos que son reunión de sus subgrupos uniparamétricos y aquellos que no. Esta propiedad depende exclusivamente del álgebra del grupo, ya que si un grupo de Lie es reunión de sus subgrupos uniparamétricos, todos los localmente isomorfos a él lo serán, y si un grupo de Lie no es reunión de sus subgrupos uniparamétricos, ninguno localmente isomorfo a él lo es.

En [2] se estudian diversos tipos de álgebras de Lie, de cara a este problema, obteniendose resultados que, conjuntamente con el estudiado en la presente nota, dan una condición necesaria y suficiente para que un grupo de Lie conexo sea reunión de sus subgrupos uniparamétricos.

2. ALGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES CON FORMA DE KILLING INDEFINIDA.

PROPOSICION 1.- *Sea g un álgebra de Lie real semisimple con forma de Killing indefinida. Ningún grupo de Lie conexo que tenga álgebra de Lie isomorfa a g, es reunión de sus subgrupos uniparamétricos.*

Al ser g semisimple, $Z(g) = \{0\}$. Por tanto, se tiene que

$g \simeq \mathrm{ad}(g))$

Como además, si G^* es el recubridor universal de los grupos de Lie con álgebra de Lie isomorfa a g, tiene centro Z^* discreto,

$G^*/Z^* \simeq \mathrm{Ad}(G^*)$

será un grupo de Lie localmente isomorfo a G^*. Esto permite operar con subálgebras de $gl(n,R)$ y subgrupos de $GL^+(n,R)$.

Al ser la forma de Killing indefinida, existen matrices $X,Y \in gl(n,R)$ tales que

$B(X,X) > 0$

$B(Y,Y) < 0$

Si los valores característicos de Y son

$$\{a_j + ib_j,\ a_j - ib_j\}_{i \leq j \leq s} \cup \{r_j\}_{s+1 \leq j \leq p}$$

se tiene que al menos hay dos complejos conjugados distintos $a+bi$, $a-bi$, pues en caso contrario $B(Y,Y) \nless 0$.

Si λ_j es un valor característico de Y, e^{λ_j} lo será de e^Y. En particular, un valor característico será

$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$

Sea $t \in R^*$ tal que

$tb = (2k+1)\pi$

Se tiene que

$e^{t(a+bi)} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) = -e^{at}$

Esto es, $g = e^{Yt}$ tiene valores característicos reales negativos. Por tanto, ningûn subgrupo uniparamétrico de $GL^{+}(n,R)$ contiene a G(Véase [1]), y en consecuencia, ninguno de Ad(G*). Por tanto, Ad(G*) no es reunión de sus subgrupos uniparamétricos. Teniendo en cuenta [3], se sigue que G* no es reunión de sus subgrupos uniparamétricos.

3. CONSECUENCIAS

Teniendo en cuenta la proposición anterior y [2], cap.V, prop.13 y 14 ii), se sigue el siguiente resultado:

PROPOSICION 2.- *Sea* G *un grupo de Lie real y conexo. Para que* G *sea reunión de sus subgrupos uniparamétricos, es necesario y suficiente que se verifiquen las siguientes condiciones:*

1.- La componente conexa de rad (G) *es exponencial.*

2.- La forma de Killing sobre G/rad(G) *es definida (positiva ó negativa)*

4. BIBLIOGRAFIA

1. JIMENEZ ALCON, F.: "Grupos de Lie conexos en relación con sus subgrupos uniparamétricos".
V JORNADAS LUSO-ESPANHOLAS DO MATEMATICA
Aveiro-1978.

2. : "Grupos de Lie conexos y subgrupos uniparamétricos".
Dpto. de Publicaciones de la Universidad
Sevilla - 1979

3. : "Una propiedad del recubridor universal de un grupo de Lie conexo"
VI JORNADAS HISPANO-LUSAS DE MATEMATICAS
Santander-1979