Pub. Mat. UAB
N° 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

HOMOGENEOUS CONTACT COMPACT MANIFOLDS AND HOMOGENEOUS SYMPLECTIC MANIFOLDS

Antonio Diaz Miranda, Agustí Reventós

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Abstract: A homogeneous contact compact manifold can be considered as the total space of a principal circle bundle over a simply connected homogeneous symplectic manifold whose fundamental form determines an integral cohomology class. A similar result but assuming the contact manifold to be simply connected was given by Boothby and Wang. The proof we give here is independent of that of Boothby and Wang. We also prove that if a Lie group acts transitivelly on a simplectic manifold of integral class by diffeomorphism of the symplectic structure, there is a Lie group acting transitivelly on the total space of the bundle obtained from the symplectic form (Kobayashi's method) by diffeomorphisms of the contact structure. (The contact form is the correspondent connection form).

Resumen: Una variedad de contacto (M,ω) se llama homogenea si existe un grupo de Lie que actua efectiva y transitivamente sobre M como grupo de difeomorfismos que dejan ω invariante. Si M es compacta, es el espacio total de un fibrado principal de grupo S^1 sobre una variedad simpléctica (B,Ω). Además la clase de cohomología determinada por Ω,$[\Omega] \in H^2(B,\mathbb{R})$, es entera. (Boothby and Wang, On contact manifolds. Annals of Math. 68(1958), 721-734).

Tenemos así un procedimiento para obtener variedades (homogeneas) simplécticas de clase entera a partir de variedades de contacto homogeneas. Nos restringimos al caso compacto. No obstante, a partir de la variedad simpléctica obtenida (B,Ω) no podemos "recuperar" la variedad de contacto inicial, puesto que si $H^2(B,\mathbb{R})$ tiene torsión pueden existir fibrados distintos con la misma clase caracteristica real $[\Omega]$.

Por tanto no podremos decidir si el fibrado obtenido a partir de Ω por el método de Weil es isomorfo al inicial.

En este trabajo demostraremos que la variedad base de la fibración de una variedad homogenea de contacto compacta, es automaticamente simplemente conexa. Con ello $H^2(B,\mathbb{R})$ no tendrá torsión y la clase característica real determinará completamente el fibrado (salvo isomorfismos). "Grosso modo", ello nos dara una "biyección" entre variedades de contacto homogeneas compactas y variedades simplécticas homogeneas, de clase de cohomología entera, compactas y simplemente conexas.

Concretamente probaremos los siguientes resultados

Teorema 1. Sea (B,Ω) una variedad simpléctica. Las siguientes condiciones son equivalentes

1) (B,Ω) es un espacio homogeneo fuertemente simplectico y compacto
2) (B,Ω) es un espacio homogeneo simplectico, compacto y simplemente conexo.
3) es una órbita coadjunta de un grupo de Lie semisimple compacto (salvo isomorfismo simpléctico)
4) (B,Ω) es un espacio homogeneo simpléctico compacto con grupo fundamental finito

Recordemos brevemente que un espacio homogeneo simpléctico (B,Ω) para un grupo de Lie G de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se llama fuertemente simplectico si para cada $X \in \mathfrak{g}$ la 1-forma $i_{X_B}\Omega$, donde X_B es el campo generado sobre B por X, es exacta.

A partir de este resultado podremos asegurar que la base del fibrado obtenido a partir de una variedad de contacto homogenea, es (homogenea) simplectica de clase entera y simplemente conexa. Tambien nos permite dar el siguiente resultado.

Teorema 2. El grupo fundamental de una variedad de contacto homogenea compacta es abeliano finito.

En lo que sigue, consideraremos dos variedades de contacto (M,ω) y (M',ω') equivalentes si existe un difeomorfismo $f\colon M \to M'$ y una constante positiva k tal que $f^*\omega' = k\omega$.

Llamemos K al conjunto de las variedades de contacto homogeneas compactas, módulo la anterior relación de equivalencia. Llamemos H al conjunto de variedades homogeneas simplécticas, con clase entera, compactas y simplemente conexas (módulo isomorfismos simplécticos).

Denotemos por $[M,\omega]$ la clase de (M,ω) en K y por $[B,\Omega]$ la clase de (B,Ω) en H. Los comentarios anteriores nos permiten definir $\Phi : K \to H$ por $\Phi([M,\omega]) = [B,\Omega]$ donde (B,Ω) es la base de la fibración obtenida a partir de (M,ω).

Obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3: Φ está bien definida, es inyectiva y exhaustiva.

Notemos que la inyectividad nos proporciona un teorema de unicidad para fibrados con conexión y la exhaustividad nos da un procedimiento para construir todas las variedades de contacto homogeneas compactas.