Pub. Mat. UAB
Nº 21 Oct. 1980
Actes VII JMHL

ESTUDIO DE UN TIPO DE CAMPOS DE KILLING

Carlos Currás Bosch

Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

ABSTRACT.-We study the Killing vector fields such that its uniparametric group is closed in the group of isometries of the Riemannian manifold (M.g).These vector fields are associated to proper and free actions of R into M.

We give the set of all Riemannian metrics in which a vector field in the same conditions that above can be Killing,and we generalise it to proper and free actions of any Lie groups.

Finally we study some properties of these Riemannian manifolds when A_X ($A_X=L_X-\nabla_X$) is zero.

----

§1.INTRODUCCION

Dada (M,g) variedad Riemanniana completa y cualquier campo de Killing X,consideremos su grupo uniparamétrico$\{\phi_t\}$ que es un subgrupo de G,grupo de isometrías de la variedad;su adherencia en G será un subgrupo abeliano y cerrado,luego será de la forma $R^k \times T^q$. Es fácil ver (véase (1)),que esta adherencia debe ser de la forma R o T^q.En el primer caso todas las órbitas son difeomorfas a R,presentándose el segundo caso cuando al menos una órbita es relativamente compacta.

El resultado inverso es cierto en el sentido siguiente:Lynge (véase (3)),probó que si $X=c_iX_i$,con X_i campos tales que sus flujos son periódicos y $[X_j,X_k]=0,\forall j,k$;existe por lo menos una métrica g, para la que es de Killing.Si consideramos $\{\phi_t\}$ acción propia y libre,es fácil probar (véase (1)) que $(M,M/\{\phi_t\})$ es un fibrado .

principal y como la fibra es R es trivial,por tanto $M \cong R \times M/\{\phi_t\}$, y tomando el producto de cualquier métrica en $N=M/\{\phi_t\}$ y una métrica invariante por la izquierda en R,X es de Killing en dicha métrica.

El mismo resultado es válido si consideramos H grupo de Lie operando propia y libremente,entonces (M,M/H) es un fibrado principal,no hay más que tomar un recubrimiento abierto de M/H localmente finito y trivializante para el fibrado principal $\{U_i\}$,una métrica g_i en cada U_i;$\{f_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$ y ϕ una métrica invariante por la izquierda en H;entonces $\Sigma(\pi^* f_i)(\pi^* g_i \times \phi)$ es una métrica Riemanniana respecto a la cual H es un grupo de isometrías.

----

§2.ESTUDIO DE LAS METRICAS.

Vamos a estudiar el conjunto de métricas respecto de las cuales X,campo tal que su grupo uniparamétrico $\{\phi_t\}$ actúa propia y libremente,es de Killing;o H,que actúa propia y libremente,es un grupo de isometrías.

CasoX.-Como $M=R\times N$,todo campo en M se puede expresar como (λ,Y),con $\lambda \in T(R)$,$Y \in T(N)$.Si g es una de las métricas buscadas

$$(*)\quad g((\lambda,Y),(\mu,Z))_{(t,n)}=g((\lambda,Y),(\mu,Z))_{(0,n)}=\lambda\mu f(n)+\lambda\phi(Z)+\mu\phi(Y)+ +g'(Y,Z).$$

Donde f es una función en N,$f(n)=g((1,0),(1,0))_{(0,n)}$, $\phi(Y)=g((1,0),(0,Y))_{(0,n)}$ es una 1-forma en N,y $g'(Y,Z)$ es la restricción de g a N.

Partiendo de f,ϕ,y g',definiremos g a partir de la expresión (*),y para que g sea una métrica es fácil ver que se necesita $f>0$ y $\forall Y \in S_n(N)$(circunferencia unidad en $T_n(N)$,respecto a la métrica g'), $\phi(Y)^2_{(n)} < f(n)$.

De hecho ϕ y f definen una 1-forma w en M,tal que $L_X w=0$,por medio de $w(Z)=w(\alpha X+\beta Y)=\alpha f(n)+\beta\phi(Y)$,siendo $Y \in T(N)$.

Por lo que podemos establecer:

<u>1.1</u>.-Dada g' métrica en N y w,1-forma tal que $L_X w=0$ y $w(X)>0$.El tensor g determinado es una métrica para la cual X es de Killing si y solo si $w(Y)^2 < w(X)$,$\forall Y \in S(N)$.

Si consideramos una 1-forma w en M tal que $w(X)>0$ y $L_X(w)=0$, tomando cualquier métrica g' en N, se puede encontrar una función definida positiva adecuada F, a fin de que el tensor g determinado por w y Fg' sea una métrica g, cumpliéndose $L_X g=0$.

Así pues:

1.2.-Dada w 1-forma en M cumpliendo $L_X w=0$ y $w(X)>0$, existen métricas g que verifican $L_X g=0$ y $i_X g=w$.

Caso H.-Sabemos que $(M,M/H)$ es un fibrado principal sobre $M/H=N$. Tomando una conexión en este fibrado principal, si g es una métrica Riemanniana en M de las que buscamos, por razonamientos similares a los anteriores se llega a ver que

$g(U,V)=g'(\pi(U),\pi(V))+\phi(\pi(V),A)+\phi(\pi(U),B)+\chi(A,B)$, siendo $U=h(U)+A^*$, $V=h(V)+B^*$, ($h(U)$=componente horizontal de U), g' es una métrica Riemanniana en N, ϕ es una 1-forma en $N\times L(H)$ invariante por $ad(H)$ ($L(H)$=álgebra de Lie de H), y χ es una función sobre N que toma valores en el conjunto de métricas de $L(H)$ invariantes por $ad(H)$.

Igual que en el caso X veríamos que dadas g', ϕ y χ, nos determinan una métrica g respecto de la cual H es un grupo de isometrías si y solo si

$$\phi(Y,A)^2 < \chi(A,A),\ \forall\, Y\in S(N).$$

Siguiendo lo hecho en el caso anterior, vemos que ϕ y χ definen una 1-forma en M, invariante por H, que toma valores en $L(H)'$, ψ, y cumple que $\psi(A^*,A)>0, \forall A^*$ vertical. (A^*=campo fundamental asociado a A).

En resumen tenemos:

1.3.- Dada g' métrica Riemanniana en N y ψ 1-forma en M, valorada en $L(H)'$, invariante por H, cumpliendo $\psi(A^*,A)>0, \forall A^*$ vertical y $\psi(Z,A)^2 < \psi(A^*,A), \forall Z$ horizontal tal que $\pi(Z)\in S(N)$. El tensor g determinado, es una métrica Riemanniana, respecto de la cual H es un grupo de isometrías.

---

§3. BREVE ESTUDIO DEL CASO $A_X=0$

Empecemos observando qué relación hay entre w y A_X. Para lo cual consideremos $2g(\nabla_Z X,Y)=-2g(A_X Z,Y)=X(g(Y,Z))+Z(g(X,Y))-$

$-Y(g(Z,X))-g([X,Y],Z)+g(X,[Y,Z])-g(Y,[X,Z])$.

Como A_X es tensorial podemos suponer $[X,Y]=0=[X,Z]$, resultando: $-2g(A_X Z,Y)=Z(w(Y))-Y(w(Z))-w([Z,Y])=2dw(Z,Y)$. Por tanto $-iA_X g=dw$.

Si w es exacta, $A_X=0$, lo que equivale a que X sea paralelo. En este caso es fácil ver que la distribución perpendicular a X es involutiva. Sea P la variedad integral maximal conexa de esta distribución por $m\in M$, es fácil ver que P es un espacio recubridor de N y que P es difeomorfo a N si y solo si w es exacta, en cuyo caso M es el producto Riemanniano de R por P.

Por último puede observarse que si (M,g) tiene una inmersión isométrica equivariante en un espacio euclídeo, X será la restricción de una isometría infinitesimal de dicho espacio euclídeo y si w no es exacta $\bar{A}_X$ no podrá ser cero, ya que de ser así $X=(1,0,\ldots,\ldots,0)$ y las v.i.m.c. de la distribución perpendicular a X son hiperplanos, por lo que cada variedad del tipo P se encontrará en uno de estos hiperplanos, por consiguiente P=N, lo que es absurdo. Luego X será de la forma $(-ax_2,ax_1,\ldots,-bx_{2k-1},bx_{2k},1,0,\ldots,0)$, y como $\|X\|$ es constante en M, M deberá encontrarse en

$$a^2(x_1^2+x_2^2)+\ldots+b^2(x_{2k-1}^2+x_{2k}^2)+1=C.$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Currás Bosch, Carlos — "A necessary and sufficient condition for a v.f. to be Killing". Coll. Math. (por aparecer).

(2) Koszul, J.L. — "Lectures on groups of transformations". Tata Institute 1965.

(3) Lynge, W.C. — "Sufficient conditions for periodicity of a Killing vector field". Proc. Amer. Math. Soc. 38(3), 614-616, May 1973.