Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

CORRESPONDENCIAS ALGEBRAICAS SOBRE LA CURVA GENERICA

José Mª Muñoz Porras

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Salamanca

RESUMEN: El resultado central de este trabajo es el siguiente teorema: Las curvas lisas de género g sobre un cuerpo k (de característica arbitraria) cuya álgebra de correspondencias algebraicas es isomorfa a $\mathbb{Z}$, son un abierto denso del esquema de Hilbert que parametriza las curvas de género g. Como Corolario resulta que las curvas de género $g \geq 3$ de móduli general no tienen automorfismos.
Deseo agradecer los consejos recibidos por el Prof. Juan B. Sancho Guimerá a quien se debe la idea de realizar este trabajo.

Fijaremos un cuerpo base k algebraicamente cerrado de característica p. Las curvas irreducibles, no singulares y de género g sobre k inmersas en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{g-1}$ por su haz canónico, forman una familia continua de curvas parametrizada por un esquema noetheriano H_g^0 (el esquema de Hilbert de las curvas lisas canónicas de género g); por consiguiente, se tiene una fibración universal de curvas de género g: $\Gamma_g^0 \longrightarrow H_g^0$. El grupo proyectivo $PGL(g-1,k)$ actúa sobre el esquema H_g^0. El resultado central de la teoría geométrica de invariantes es la existencia e irreducibilidad del cociente H_g^0/PGL: la variedad de móduli de las curvas de genéro g (*). Por tanto existirá un único punto genérico $\eta \longrightarrow H_g^0$ y tendrá sentido hablar de la curva genérica de género g sobre k: será la fibra del morfismo $\Gamma_g^0 \longrightarrow H_g^0$ sobre el punto η. El estudio de la irreducibilidad de la variedad de móduli conduce de modo natural al concepto de curva estable: una curva estable de género g sobre un esquema S es esencialmente una fami-

(*) Este resultado era conocido en el caso clásico $k=\mathbb{C}$ por la Escuela Italiana. Recientemente ha sido demostrado sobre cuerpos de característica arbitraria por Deligne y Mumford: "The irreduciblity of the space of curves of a given genus" - Publ. Math. I.H.E.S., 36 (1969).

lia plana de curvas, $C \xrightarrow{\pi} S$, de género aritmético g cuyas únicas posibles singularidades son nodos. Del mismo modo que en el caso de las curvas lisas, se verifica que las curvas estables de género g dotadas de su inmersión tricanónica forman una familia continua, $\Gamma_g \xrightarrow{\pi} H_g$, parametrizada por una variedad irreducible H_g. La variedad H_g de curvas estables es una compactificación de la variedad de curvas lisas.
En el estudio de la geometría de la curva genérica de género g es fundamental la variedad H_g, que permite deformarla a las curvas racionales con g nodos reduciendo, por deformación, las propiedades de la curva genérica al estudio de la geometría de una curva racional con nodos.

Las proposiciones geométricas que se estudien tendrán la siguiente propiedad: si es cierta para una curva, también lo es para cualquier generalización de dicha curva. Por tanto, si la curva genérica tiene una propiedad, dicha propiedad será cierta para todas las curvas de un abierto denso de la variedad de móduli. En este trabajo se estudiarán algunas propiedades de las curvas de móduli general:
Sean C_1 y C_2 dos curvas no singulares sobre k, si a cada punto de C_1 se le hacen corresponder n_2 puntos de C_2 y a cada punto de C_2 n_1 puntos de C_1, se tendrá una correspondencia entre C_1 y C_2 de grados n_1 y n_2. Asignando a cada correspondencia su gráfica en $C_1 \times C_2$, se pueden identificar las correspondencias algebraicas entre puntos de C_1 y C_2 con los divisores de $C_1 \times C_2$.
Se define el álgebra de clases de correspondencias de una curva C, $A(C)$, como las correspondencias módulo las que son deformables linealmente a correspondencias triviales (representadas por curvas verticales y horizontales en $C \times C$). El producto de dos correspondencias positivas e irreducibles T y T', se define por el producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
& & T \times_{C_2} T' \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& T \arrow[dl] \arrow[dr] & & T' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C_1 & & C_2 & & C_3
\end{tikzcd}$$

En $A(C)$ se definen una involución $*$ (la simetría respecto de la diagonal) y una traza: $tr(T) = n_1(T) + n_2(T) - T \cap \Delta$. Con estas notaciones se verifica que $A(C)$ es una $\mathbb{Z}$-álgebra finito-generada y la métrica $(T_1, T_2) \longmapsto tr(T_1 \cdot T_2^*)$ es definida positiva (Desigualdad de Castelnuovo).
Si T es una correspondencia positiva y p_1, p_2 las proyecciones en los

factores, entonces la composición de morfismos $p_{2*} \cdot p_1^*$ define un homomorfismo de grupos $\mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{T} \mathrm{Pic}(C)$. Asignando a cada correspondencia el endomorfismo que define entre los divisores de la curva, resulta que las clases de correspondencias algebraicas se identifican con los endomorfismos de la jacobiana de la curva.

Si J_n es el núcleo de multiplicar por n en la jacobiana de C , J , se define el módulo ℓ-ádico de J (ℓ = número primo $\neq p$) por:

$$T_\ell(J) = \varprojlim_{m} J_{\ell^m} \quad \text{(se prueba que } T_\ell(J) \simeq \mathbb{Z}_\ell^{2g} \text{ siendo } g \text{ el género de } C\text{)}$$

Si T es una correspondencia sobre C , define un endomorfismo en cada J_{ℓ^m} y por tanto se tiene un morfismo $A(C) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(J)$ que es inyectivo, es decir: una correspondencia algebraica sobre C queda determinada por su actuación sobre los elementos de torsión de la jacobiana.

A continuación vamos a ver que toda correspondencia algebraica sobre una curva de tipo general es deformable linealmente a un múltiplo entero de la diagonal (*):

Teorema: El conjunto de curvas no singulares de género g cuya álgebra de correspondencias es isomorfa a $\mathbb{Z}$ es un abierto denso de la variedad de móduli que parametriza las curvas de género g . Es decir: las funciones abelianas asociadas a una curva de tipo general no tienen multiplicaciones complejas.

Demostración: Sea C la curva genérica de género g y T una correspondencia sobre C . La correspondencia T inducirá una única correspondencia que seguiremos designando por T , sobre Γ_g/H_g . Al deformar C a una curva racional con g nodos, C_0 , T se deformará a una correspondencia T sobre C_0 ; veamos en primer lugar que $T_0 \equiv n\Delta_{C_0}$: se puede construir una familia de curvas $Z_g \longrightarrow S = \left[(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/S_2 \times \overset{g)}{\ldots} \times (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/S_2\right] - \{\text{discriminante}\}$ que parametriza todas las maneras de dotar de g nodos a $\mathbb{P}^1_k$; existirá un morfismo $S \longrightarrow H_g$ tal que $Z_g = \Gamma_g \times_{H_g} S$ y por tanto T induce una correspondencia $\bar{T}$ de Z_g/S , la correspondencia T_0 es una de las fibras especiales de $\bar{T}$. La jacobiana de una curva con g nodos es

---

(*) En el caso clásico $k = \mathbb{C}$ este teorema fué demostrado por Hurwitz y Severi. Una demostración esencialmente geométrica puede verse en el tratado de Enriques-Chisini.

$\mathbb{G}_m \times \overset{g)}{\cdots} \times \mathbb{G}_m$, luego su módulo ℓ-ádico es $T_\ell(\mathbb{G}_m) \times \overset{g)}{\cdots} \times T_\ell(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}_\ell^g$; cada factor proviene de un nodo y T_0 será multiplicar por n_i en el factor i-ésimo. Como S es una parametrización irreducible que permuta todos los nodos de C_0 entre sí, resultará que el núcleo de multiplicar por n en $J(Z_g/S)$ es conexo sobre S ; de aquí se sigue fácilmente que $n_1 = \ldots = n_g$ y por tanto $T_0 \equiv n\Delta_{C_0}$.

Para concluir bastará con probar que si $T_0 \equiv 0$, entonces $T \equiv 0$; ahora bien, si $T_0 \equiv 0$, entondes $\mathrm{tr}(T_0 \cdot T_0^*) = 0$ y como $\Gamma_g \longrightarrow H_g$ es un morfismo plano, la traza será constante en fibras, luego $\mathrm{tr}(T \cdot T^*) = 0$ y por la desigualdad de Castelnuovo se concluye.

Corolario 1: Las curvas lisas de género g sobre k cuyos únicos automorfismos son la identidad son un abierto denso de la variedad de móduli.

Demostración: Observemos que si $g \geq 2$ y T es una correspondencia birracional de una curva lisa C , la condición necesaria y suficiente para que T sea una correspondencia con valencia es que C sea hierelíptica. Por tanto el Corolario se sigue del Teorema teniendo en cuenta que si $g \geq 3$ la curva genérica de género g no es hiperelíptica: pues las curvas de género g dependen de $3g-3$ parámetros, mientras que las curvas hiperelípticas de género g sólamente dependen de $2g-1$ parámetros.

Corolario 2: Las curvas lisas de género $g \geq 2$ sin involuciones irracionales (es decir: cuyos cuerpos de funciones racionales no tienen subcuerpos de género $g > 0$) son un abierto denso de la variedad de móduli.

REFERENCIAS:

[1] P. Deligne and D. Mumford - *The irreducibility of the space of curves of a given genus*. Publ. Math. I.H.E.S., 36, 1969.

[2] Enriques-Chisini - *Teoría geométrica delle equazioni e delle funcioni Algebriche*. Ed. Zanichelli, 1924.

[3] J.I. Igusa - *Fibre Systems of Jacobian Varieties*. Amer. Math. Journal, 78, 1956.

[4] S. Lefschetz - *A theorem on correspondences on algebraic curves*. Amer. J. Math., 50, 1928.

[5] D. Mumford - *Abelian Varieties*. Oxford Univ. Press, 1974.

[6] D.H. Ruipérez - *Correspondencias divisoriales sobre esquemas relativos*. En esta Conferencia.

[7] F. Severi - *Trattato di Geometria Algebrica*. Vol. I, Parte I, Ed. Zanichelli, 1926.

[8] S G A IV 1/2 - L.N.M., Vol. 569, Springer-Verlag.

[9] S G A VII - L.N.M., Vols. 288 y 340, Springer-Verlag.

[10] A. Weil - *Courbes Algebriques et Varietés Abeliennes*. Hermann, 1948.