Pub. Mat. UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

CORRESPONDENCIAS DIVISORIALES ENTRE ESQUEMAS RELATIVOS

Daniel Hernández Ruipérez

Dpto. de Algebra y Fundamentos
Universidad de Salamanca

ABSTRACT. Let X, Y be schemes over S. The divisorial correspondences between X, Y are define to be the linear equivalence classes of divisors on $X \times_S Y$ modulo the inverse images of the divisors on each factor. The main result is that the divisorial correspondences are a scheme over S whose geometric fibres are finitely generated abelian groups. A metric tensor on the divisorial correspondences is also given generalizing the trace metric for correspondences on curves, and it verifies a Castelnuovo inequality saying that it is positive definite modulo torsion.

Las correspondencias divisoriales entre dos esquemas X, Y son las correspondencias algebraicas entre los puntos de X y los divisores de Y módulo la correspondencia lineal, esto es, tomando la gráfica, las clases de equivalencia lineal de divisores del esquema producto $X \times Y$. Se consideran correspondencias triviales las que asignan a todos los puntos divisores equivalentes a un único divisor y las inversas a las de este tipo, esto es, los divisores del producto que son linealmente equivalentes a sumas de divisores que vienen de los factores. En el caso relativo, sea S un esquema noetheriano y $f:X \longrightarrow S$, $g:Y \longrightarrow S$ esquemas sobre S y $h:Z = X \times_S Y \longrightarrow S$ el producto. Las proyecciones $p:Z = X \times_S Y \longrightarrow X$, $q:Z = X \times_S Y \longrightarrow Y$ inducen morfismos de functores en grupos $p^* : \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(X/S)et \longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(Z/S)et$, $q^* : \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(Y/S)et \longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(Z/S)et$ entre los functores de Picard localizados para la topología etale.

Definición: Se define el functor de correspondencias divisoriales entre X/S e Y/S, como el haz sobre la topología etale $\underset{\sim}{C}(X,Y)$ definido por la sucesión exacta:

$$\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(X/S)\mathrm{et} \times_{S} \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(Y/S)\mathrm{et} \xrightarrow{p^*\otimes q^*} \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(X\times_S Y/S)\mathrm{et} \longrightarrow \underset{\sim}{C}(X,Y) \longrightarrow 0$$

Se verifica:

Teorema 1: Los divisores algebraicamente equivalentes a cero de un producto son linealmente equivalentes a sumas de divisores algebraicamente equivalentes a cero que provienen de los factores. Con más precisión, si $f:X\longrightarrow S$, $g:Y\longrightarrow S$ son planos, proyectivos y de fibras geométricas íntegras (de modo que existen los esquemas de Picard relativos, [1]) el morfismo natural de esquemas en grupos algebraicos:

$$p^*\otimes q^*: \mathrm{Pic}^0(X/S) \times_S \mathrm{Pic}^0(Y/S) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X\times_S Y/S)$$

inducido entre "las componentes conexas del origen" de los esquemas de Picard ([1]) , es epiyectivo.

Demostración: Daremos solamente una idea de la demostración. Si L es un haz de línea en $X\times Y$ algebraicamente equivalente a cero es deformable al haz de anillos locales $\mathcal{O}$ mediante una variedad conexa de parámetros T, esto es, existe un haz de línea $\mathcal{L}$ sobre $X\times Y\times T$ plano sobre T y dos puntos t_0, t_1 de T de modo que $\mathcal{L}_{t_0} = \mathcal{O}$, $\mathcal{L}_{t_1} = L$.
Si se piensa L como un haz de línea relativo a $X\times Y\longrightarrow Y$, define un morfismo $Y\longrightarrow \mathrm{Pic}^0 X$. Basta con demostrar que su imagen es un punto, pues siendo M el haz de línea en X que define dicho punto será $L = p^*M\otimes q^*N$ para cierto haz invertible N en Y. Ahora bien dicho morfismo se deforma mediante el morfismo $Y\times T\longrightarrow (\mathrm{Pic}^0X)\times T$ definido por $\mathcal{L}$ a un morfismo $Y = Y\times t_0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0 X$ cuya imagen es un punto, luego por platitud su imagen ya era un punto ([3], Prop. 6.1). En el caso general se argumenta análogamente.

Por lo tanto el grupo de las correspondencias divisoriales resulta ser el cociente del grupo de Néron-Severi del producto $NS(X\times_S Y/S) =$
$= \mathrm{Pic}(X\times_S Y/S)/\mathrm{Pic}^0(X\times_S Y/S)$ módulo el producto de los grupos de Néron-Severi de los factores $NS(X/S)$, $NS(Y/S)$. Es decir:

Corolario: En las hipótesis del teorema existe una sucesión exacta de haces para la topología etale

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{NS}_{X/S} \times_S \underset{\sim}{NS}_{Y/S} \longrightarrow \underset{\sim}{NS}_{X\times_S Y/S} \longrightarrow \underset{\sim}{C}(X,Y) \longrightarrow 0$$

siendo $\underset{\sim}{NS}_{X/S}$ el functor "grupo de Néron-Severi" ([2]) de X/S y análogamente para Y, y $X\times_S Y$.
Se sigue:

Teorema 2: En las hipótesis del teorema el functor de correspondencias divisoriales se representa por un S-esquema, el esquema de las correspondencias divisoriales $C(X,Y)$ que es un esquema en grupos cuyas fibras geométricas son grupos abelianos finito-generados de rango acotado.

Demostración: La existencia es por verificación directa de las condiciones de Artin ([4],5.3). La finitud por el teorema de la base ([2], th. 5.1).

Sea ahora X un esquema proyectivo íntegro de dimensión $m>1$ y grado n sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, y D una correspondencia divisorial de X en sí mismo. Un punto de X se transforma en un divisor D_2 de X cuyo grado se llama grado por la izquierda a. Análogamente, por la correspondencia inversa un punto se transforma en un divisor D_1 cuyo grado b es el grado por la derecha. También se consideran los grados por la izquierda y derecha de la intersección $c = \mathrm{gr}\, D_2 \cdot D_2$, $d = \mathrm{gr}\, D_1 \cdot D_1$. Con precisión, si $p_1, p_2 : X\times X \rightrightarrows X$ son las proyecciones H es la sección hiperplana de X y $H_1 = p_1^*H$, $H_2 = p_2^*H$ se tiene:

$$D\cdot H_1^m \cdot H_2^{m-1} = na \;,\; D\cdot H_2^m\cdot H_1^{m-1} = nb \;,\; D\cdot D\cdot H_1^m\cdot H_2^{m-2} = nc \;,\; D\cdot D\cdot H_2^m\cdot H_1^{m-2} = nd$$

Si D' es otra correspondencia divisorial, sean e y f las coincidencias de D, D' y de sus inversos respectivamente, esto es $D\cdot D'\cdot H_1^m\cdot H_2^{m-2} = ne$, $D\cdot D'\cdot H_2^m\cdot H_1^{m-2} = nf$. Se define una métrica sobre el grupo de las correspondencias divisoriales por:

$$T_2(D,D') = n^3 \binom{2m-1}{m-1} \Big(\frac{m}{m-1}\,(cc'bb' + aa'dd') + 2(cba'd' + c'b'ad) +$$

$$+ 2(aa'+bb')(cc'+dd') - \frac{nm}{m-1}\,(cc'f + dd'e) - 2(cc'+dd')T_r(\bar D, \bar D')\Big)$$

siendo $\bar D, \bar D'$ las correspondencias inducidas por D, D' en la curva H^{m-1} de X y $T_r(\bar D,\bar D') = aa' + bb' - D\cdot D'\cdot H_1^{m-1}\cdot H_2^{m-1}$ la métrica de la traza para las correspondencias en curvas ([5]). Como en curvas se verifica

Teorema 3 (Desigualdad de Castelnuovo): Para toda correspondencias divisorial D, es $T(D,D) \geq 0$ y $T(D,D) = 0$ si y solo si $n(c+d)D = 0$ en el grupo de correspondencias divisoriales. Por tanto:

a) La métrica inducida en el grupo $C(X,X)$/Torsión es definido positiva.

b) El radical de la métrica T_2 es el subgrupo de torsión de $C(X,Y)$.

Demostración: $T_2(D,D) = -E^2 \cdot (H_1 + H_2)^{2m-2}$ siendo $E = n(c+d)D - daH_2 - cbH_1 - ncp_2^*D_2 - ndp_1^*D_1$. Como $E \cdot (H_1 + H_2)^{2m-1} = 0$ se sigue del teorema del índice de Hodge ([2], Cor. 7.4) que $T_2(D,D) \geq 0$ y $T_2(D,D) = 0$ si y solo si E es numéricamente equivalente a cero. Se concluye por el siguiente lema que se demuestra como el teorema 1.

Lema: Si X, Y son esquemas proyectivos íntegros sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, el morfismo natural de esquemas en grupos:

$$\mathrm{Pic}^{\tau}(X) \times \mathrm{Pic}^{\tau}(Y) \xrightarrow{p^* \otimes q^*} \mathrm{Pic}^{\tau}(X \times Y)$$

entre los grupos de divisores numéricamente equivalentes a cero, es un epimorfismo.

Sea ahora X, Y esquemas proyectivos lisos y conexos sobre un cuerpo k. Las correspondencias divisoriales $C(X,Y)$ se identifican formalmente con los morfismos de X en el esquema de Picard de Y, $\mathrm{Pic}(Y)$, módulo traslaciones, por tanto se tendrá, dado que X es reducido

$$C(X,Y) = \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Pic}(Y)_{red})/\text{Traslaciones} = \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Pic}^0(Y)_{red})/\text{Traslaciones}$$

Como $\mathrm{Pic}^0(Y)_{red}$ es una variedad abeliana ([1], 3.2), si $A(X)$ denota la variedad de Albanese de X, ([1], 5.4) se tendrá:

$$C(X,Y) = \mathrm{Hom}_{grupo}(A(X), \mathrm{Pic}^0(Y)_{red})$$

De donde

Teorema: Si X,Y son proyectivas lisas y conexas sobre un cuerpo k, el esquema de correspondencias divisoriales es un grupo abeliano finito generado libre.

Si $X = Y$, la métrica T_2 antes definida es definido positiva.

REFERENCIAS:

[1] A. Grothendieck - *Technique de descente et théorèmes d'existence en Géométria Algébrique. V. Les Schemes de Picard: Théorèmes d'existence.* Sem. Bourbaki, n° 232.

[2] S.L. Kleiman - *Les théorèmes de finitude pour le foncteur de Picard.* Exp. XIII en S.G.A. 6. Springer-Verlag, L.N.M., n° 225.

[3] D. Mumford - *Geometric Invariant Theory.* Ergebrisse ... Band, 34, Springer-Verlag.

[4] M. Artin - *Algebraization of Formal Moduli I.* In Global Analysis. Princeton Math. Series, n° 29 .

[5] A. Weil - *Courbes Algébriques et Variétés Abéliennes.* Hermann, París, 1971.