Pub. Mat. UAB
Nº 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

DEFORMACIÓ SEMIUNIVERSAL DEL GERME DELS n EIXOS COORDENATS DE C^n.

Josep Ferrer Llop

Dpt. de Matemàtiques, E.T.S.E.I.B.
Universitat Politècnica de Barcelona

ABSTRACT

The semi-universal deformation of X_n, germ of the union of the n coordinate axes of $\mathbb{C}^n$, is presented here. For n>2, the base is a singular germ of dimension 2n-3, determined by the intersection of certain quadratic cores in $\mathbb{C}^{n(n-2)}$.

Sigui X_n la unió dels n eixos coordenats de $\mathbb{C}^n$, és a dir:

$$X_n = \left\{ f_{ij}(x)=x_i x_j=0,\ 1\leq i,j\leq n \right\} \subset \mathbb{C}^n$$

El seu germe a l'origen l'escriurem també X_n. Suposarem sempre n>2.

L'estudi de les seves deformacions te interês degut a que és un germe homogeni, i que per n gran no correspon als tipus fins ara més estudiats (interseccions completes, Cohen--Macaulay de codimensió 2, determinantals, Gorenstein de codimensió 3,...). Veieu, per exemple, els casos particulars n=3 i n=4 a (5) i (4) respectivament. No coneixem resultats generals per n superior.

El principal resultat d'aquesta comunicació és la proposició 6, que explicita la deformació semiuniversal de X_n, per qualsevol n>2. Observis que la base resulta ésser homogània, no llisa, i de codimensió elevada.

I. - Necessitarem alguns resultats sobre l'espai $T^1(X_n)$, que reproduïm de (2). Sigui $\mathbb{D}$ el punt doble de $\mathbb{C}$, definit per $\varepsilon^2=0$, i sigui $T^1(X_n)$ l'espai vectorial de les classes d'isomorfisme de les deformacions de X_n infinitessimals de primer ordre, és a dir, sobre $\mathbb{D}$. Veieu, per exemple (1), (4) i (7).

<u>Lema 1</u>: El mòdul de relacions de $\{f_{ij}\}$ és generat per les de la forma

$$x_k\, f_{ij} - x_i\, f_{kj} = 0$$

<u>Proposició 2</u>: Per cada $i\neq k$, $1\leq i,k\leq n$, sigui τ_k^i el germe a l'origen de la varietat de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{D}$ definida per

$$f_{ik}(x) + \varepsilon\, x_k = 0$$

$$f_{jh}(x) = 0 \qquad\qquad \text{si } (j,h)\neq(i,k)$$

Aleshores, $\tau_k^i\to\mathbb{D}$ (projecció) és una deformació de X_n.

Escriurem també τ_k^i la classe en $T^1(X_n)$ d'eixa deformació.

<u>Proposició 3</u>:

1) Les classes τ_k^i engendren l'espai vectorial $T^1(X_n)$.
2) Les relacions de dependència lineal son:

$$\tau_1^i + \ldots + \tau_{i-1}^i + \tau_{i+1}^i + \ldots + \tau_n^i = 0 \qquad 1\leq i\leq n$$

Doncs, una base de $T^1(X_n)$ està formada per (τ_k^i), amb $1\leq i,k\leq n$, $k\neq i,i+1$ (cíclicament, és a dir, si $i=n$, $k\neq n,1$).

<u>Corolari 4</u>: $\dim T^1(X_n) = n(n-2)$.

II.- Determinem ara la deformació semiuniversal de X_n.

Sigui u_k^i ($i\neq k$, $1\leq i,k\leq n$) les funcions coordenades de $\mathbb{C}^{n(n-1)}$. Per $k\neq i,j$, escriurem

$$P_k^{ij} = u_j^i\, u_k^j + u_i^j\, u_k^i - u_k^i\, u_k^j$$

Considerem $\overline{S}_n$, $\overline{\mathfrak{X}}_n$, germes a l'origen de les varietats, respectivament:

$$\left\{p_k^{ij} = p_{k'}^{ij}\ ,\quad \text{per tot } k\neq i,j;\ k'\neq k,i,j\right\} \subset \mathbb{C}^{n(n-1)}$$

$$\left\{x_i\ x_j + u_i^j\ x_i + u_j^i\ x_j + p_k^{ij} = 0,\ 1\leq i,j\leq n\right\} \subset \mathbb{C}^n \times \overline{S}$$

<u>Proposició 5</u>: $\overline{X}_n \rightarrow \overline{S}_n$ (projecció) ês una deformació de X_n.

<u>Demostració</u>: Pel lema 1, cal només comprovar que la relació

$$x_k\ f_{ij} - x_i\ f_{jk} = 0$$

s'exten a la

$$\begin{aligned}&(x_k - u_j^k)(x_i\ x_j + u_i^j\ z_i + u_j^i\ z_j + p_k^{ij}) +\\ &+(-x_i - u_j^i)(x_j\ x_k + \qquad \dots \qquad) +\\ &+(-u_i^j + u_k^j)(x_i\ x_k + \qquad \dots \qquad) = 0\end{aligned}$$

<u>Proposició 6</u>: La restricció $X_n \rightarrow S_n$ de la deformació anterior a

$$S_n = \overline{S}_n \cap \left\{u_2^1 = u_3^2 = \dots = u_n^{n-1} = u_1^n = 0\right\}$$

es la deformació semiuniversal de X_n.

<u>Esquema de la demostració</u>: Per la proposició 3, l'espai tangent a S_n ês $T^1(X_n)$.
Es demostra que la deformació $X_n \rightarrow S_n$ correspon a la construida per Schlessinger a (6), doncs, ês formalment quasi-universal. Finalment, de (3) es dedueix que és analíticament semi-universal.

<u>Observació 7</u>: Remarquem que la base S_n ês una intersecció de cons quadràtics. La seva dimensió ês 2n-3.

BIBLIOGRAFIA

(1) I.F.Donin: Complete families of deformations of germs of complex spaces, Math. USSR Sb., 18 (1972), 397-406.
(2) J. Ferrer y F.Puerta: Deformaciones infinitesimales del germen de los n ejes coordenados de $\mathbb{C}^n$, Actas VI Jorn. Hisp.-Lusit. Santander (1980), pendent de publicació.

(3) A.Galligo et C.Houzel: Déformations semi-universelles... Astérisque n.7-8 (1973), 139-164.

(4) V.P.Palamodov: Deformation of Complex Spaces, Russian Math. Surveys 31:3, 129-197 (1976).

(5) M.Schaps: Deformations of Cohen-Macaulay schemes of codimension 2 and non-singular deformations of spaces curves, Am.Jour. of Math., 99 (1977), 669-685.

(6) M.Schlessinger: Functor of Artin Rings, Trans.A.M.S. 130 (1968), 208-222.

(7) G.N.Turina: Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math.USSR Izv., 3 (1970), 967-999.