Pub. Mat. UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

GRUPOS FINITOS CON MUCHOS NORMALES MINIMALES

Antonio Vera López, Francisco Pérez Monasor

Dpto. de Algebra
Universidad de Valencia

G denotará un grupo finito , $r(G)$ el número de clases de conjugación de G y $\beta(G)$ el número de normales minimales de G. En este trabajo se clasifican las familias de grupos $\mathcal{A}_j$ que verifican $\beta(G) = r(G)-j$ para $1 \leq j \leq 5$ y como corolario los grupos con j clases de conjugación para $1 \leq j \leq 6$. El proceso seguido para calcular $\mathcal{A}_{l+1}$ conocidas $\mathcal{A}_j$ $1 \leq j \leq l$ es vía el conocimiento de los grupos con $r(G) = l+1$ clases de conjugación, las cuales se pueden calcular ya que están en $\bigcup_{1 \leq k \leq l} \mathcal{A}_k$.

En este trabajo se clasifican los grupos con "muchos" normales minimales, y de paso ¡de forma inmediata! se obtiene la clasificación de los grupos finitos con número de clases de conjugación dado.

Notemos que los normales minimales resolubles de un grupo finito G y sus automorfismos, están en estrecha conexión con las relaciones definitorias del mismo, ésto junto con la condición de que el grupo tenga "muchos" normales minimales hace que en el caso resoluble surjan las relaciones definitorias válidas de dichos grupos, previo estudio del grupo $G/S(G)$, donde $S(G)$ es el producto de todos los normales minimales de G. Por otro lado el caso no resoluble se ataca previa clasificación de los grupos simples no abelianos con $t_G = 4$ y 5 donde $t_G = |\{ o(g) \mid g \in G \}|$.

Teorema 1

1) $\beta(G) = r-1 \Leftrightarrow G$ es 2-grupo abeliano elemental

2) $\beta(G) = r-2 \Leftrightarrow G$ es uno de los grupos siguientes:

a) C_3

b) $(C_3 x \overset{t}{\dots} x C_3) x_{\theta_1} C_2 = (<y_1> x \dots x <y_t> x_{\theta_1} <x>$ con θ_1 dado por $y_i^x = y_i^{-1}$ para $i=1,\dots,t$.

3) $\beta(G) = r-3 \Leftrightarrow G$ es uno de los grupos siguientes:

a) C_4

b) D_{10}

c) $((C_2 x C_2) x \overset{t}{\dots} x (C_2 x C_2)) x_{\theta_2} C_3 = (<x_1> x <y_1> x \dots x <x_t> x <y_t>) x_{\theta_2} <z>$ con θ_2 dado por $x_i^z = y_i$, $y_i^z = x_i y_i$ para $i=1,\dots,t$.

Corolario 1

1) $r=2 \Leftrightarrow G \in \{C_2\}$

2) $r=3 \Leftrightarrow G \in \{C_3, \Sigma_3\}$

3) $r=4 \Leftrightarrow G \in \{C_4, C_2 x C_2, A_4, D_{10}\}$

Lema 1

Sea G un grupo simple no abeliano. Entonces: $t_G = 4 \Leftrightarrow G \simeq A_5$.

Teorema 2

$\beta(G) = r-4$ si y solo si G es uno de los grupos siguientes:

a) C_5

b) C_6

c) D_8

d) Q_8

e) D_{12}

f) DC_3

g) D_{14}

h) $C_7 x_{\theta_3} C_3 = <a, b \mid a^7=1=b^3, a^b=a^{4}>$

i) Σ_4

j) A_5

k) $(C_5 x \overset{t}{\dots} x C_5) x_{\theta_4} C_4 = (<a_1> x \dots x <a_t>) x_{\theta_4} <b>$ con θ_4 dado por $a_j^b = a_j^2$ $j=1,\dots,t$.

Corolario 2

$r = 5 \iff G \in \{C_5\ ,\ D_{14}\ ,\ C_7 x_{\theta_3} C_3\ ,\ \Sigma_4\ ,\ D_8\ ,\ Q_8\ ,\ Hol(C_5)\ ,\ A_5\}$

Lema 2

Sea G un grupo simple no abeliano. Entonces $t_G = 5$ si y solo si G es uno de los grupos siguientes:

a) $PSL(2,7)$
b) $A_6 = PSL(2,9)$
c) $SL(2,8)$

Teorema 3

$\beta(G) = r-5$ si y solo si G es uno de los grupos siguientes:

a) $C_2 x C_4$
b) $C_3 x C_3$
c) $C_9 x_{\theta_5} C_2 = \langle a \rangle x_{\theta_5} \langle b \rangle$ con θ_5 dado por $a^b = a^{-1}$
d) $(C_3 x C_3) x_{\theta_6} C_4 = (\langle a_1 \rangle x \langle a_2 \rangle x_{\theta_6} \langle b \rangle$ con θ_6 dado por
$a_1^b = a_2\ ,\ a_2^b = a_1^{-1}$
e) $((C_3 x C_3) x \overset{t}{\cdots} x (C_3 x C_3)) x_{\theta_7} Q_8 = (\langle x_1 \rangle x \langle y_1 \rangle x \ldots x \langle x_t \rangle x \langle y_t \rangle x_{\theta_7} Q_8$
con θ_7 dado por $x_k^a = y_k\ ,\ y_k^a = x_k^{-1}\ ,\ x_k^b = x_k y_k\ ,\ y_k^b = x_k y_k^{-1}$
para $k=1,\ldots,t$ y siendo $Q_8 = \langle a^b | a^4 = 1\ ,\ b^2 = a^2\ ,\ a^b = a^{-1} \rangle$
f) $PSL(2,7)$

Corolario 3

$r = 6 \iff G \in \{C_6\ ,\ (C_3 x C_3) x_{\theta_1} C_2\ ,\ (C_3 x C_3) x_{\theta_6} C_4\ ,\ C_9 x_{\theta_5} C_2\ ,$
$DC_3\ ,\ D_{12}\ ,\ (C_3 x C_3) x_{\theta_7} Q_8\ ,\ PSL(2,7)\}.$

Bibliografia

1 W. Burnside "Theory of Groups of Finite order" 2nd ed. Dover 1955
2 B. Huppert "Endliche Gruppen I" Springer-Verlag 1967
3 M. Isaacs "Character theory of finite groups" Academic.Press 1976
4 A. Mann "Conjugacy classes in finite groups" Israel J. Math. Vol. 31, 1978 pp 78-84.