Pub. Mat. UAB
N°20 Set. 1980
Actes VII JMHL

DOMINIOS "MINIMOS" DONDE ESTAN CIERTAS COLUMNAS DE LA TABLA DE CARACTERES DE A_n

Antonio Vera López

Dpto. de Algebra
Universidad de Valencia

"Sabemos que $\chi(g)\in\mathbb{Z}$ $\forall\chi\in\mathrm{Irr}(\Sigma_n)$ y $\forall g\in\Sigma_n$. El problema análogo para A_n está sin resolver. Dado $g\in A_n$ nos planteamos el problema de encontrar el menor subcuerpo F_g de $\mathbb{C}$ tal que $\psi(g)\in F_g$ $\forall\psi\in\mathrm{Irr}(A_n)$. Resolvemos este problema para ciertos elementos de A_n, y también obtenemos las columnas de la tabla de caracteres de A_n que están en $\mathbb{R}$. Como ejemplo práctico se obtiene F_g para $g\in A_n$ y $2\leq o(g)\leq 10$ y los dominios "mínimos" en los que están las columnas de las tablas de caracteres de A_n para $5\leq n\leq 9$".

1. Introducción y notación.

G denotará siempre un grupo finito, $\mathbb{Q}_n$ el cuerpo $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ donde ε es una raiz primitiva n-ésima de 1 y $\underset{G}{\sim}$ la relación de conjugación en G. Si $f:\{1,\dots,n\}\longrightarrow\mathbb{N}\cup\{o\}$ es una función tal que $\sum_{i=1}^{n} f(i)i=n$, entonces $[f]$ denota la clase de conjugación de Σ_n asociada al tipo $(f(1),\dots,f(n))$ ó sea $g\in[f]$ sii g contiene f(i) i-ciclos para $1\leq i\leq n$. Sabemos que $[f]\subseteq A_n$ si y solo si $\sum_{1\leq i\leq n/2} f(2i)$ es par, además supuesto esto, $[f]$ es una clase de conjugación en A_n si y solo si $f(2i)>o$ ó $f(2i+1)>1$ para algún i, en otro caso $[f]$ se excinde en dos clases de conjugación de A_n (ver [1] pág. 298). Denotamos $T_3=\{4k+3\,|\,k\geq o\}$.

Sabemos que existen algunos métodos para computar la tabla de caracteres de los grupos simétricos y alternados, si bien estos métodos involucran teoría de factorización de polinomios en varias variables y los calculos se hacen muy laboriosos. El objetivo de los resultados que siguen es obtener información sobre los dominios más "simples" en los que estan las columnas de la tabla de caracteres de A_n, en orden a obtener de una manera más elegante y rápida la tabla de caracteres de dichos grupos.

Dado $m \in \mathbb{N}$, denotamos $[m,o(g)] = m.c.m.(m,o(g))$ y

$$(m,o(g)) = m.c.d.(m,o(g)) .$$

<u>Teorema 1</u>

Sea G un grupo, $g \in G$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\chi(g) \in \mathbb{Q}_{(m,o(g))} \quad \forall\, \chi \in Irr(G) \quad \text{si y solo si} \quad g \underset{G}{\sim} g^s \quad \forall\, s \in I$$

donde $I = \{s \in \mathbb{N} \mid 1 \leq s \leq [m,o(g)],\ (s,[m,o(g)])=1 \text{ y } s=\dot{m}+1\}$

Es conocido el siguiente resultado:

" $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall\, \chi \in Irr(G)$ si y solo si $g \sim g^s$ para cada s primo con $o(g)$ ", el teorema 1 generaliza esta situación. Notemos que

$$|I| = \phi(o(g))/\phi((m,o(g)))$$

donde ϕ es el indicador de Euler. Sabemos que $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{o(g)}$ siempre, en el Teorema 1 hemos dado un criterio para saber cuando $\chi(g) \in \mathbb{Q}_{n'}$ con $n' | o(g)$ (*), nos interesamos por el menor n' que cumpla (*).

Ahora damos los resultados obtenidos sobre la tabla de caracteres de A_n:

<u>Teorema 2</u>

Sea $n \geq 4$ y $CL(g) = [f] \subseteq A_n$, entonces $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall\, \chi \in Irr(A_n)$ si f verifica una de las condiciones siguientes:

i) $f(2) \neq 0$

ii) $f(1) \geq 2$

iii) $f(i)$ es par $\forall\, i=2,\dots,n$.

En lo que sigue χ designará cualquier caracter irreducible de A_n.

Lema 1

Sea $g = (a_1 \dots a_t) \in \Sigma_n$, y $X = \{1,\dots,n\} - \{a_1,\dots,a_t\}$. Entonces
$\{x \in \Sigma_n \mid g^x = g^{-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \dots a_i \\ a_i \dots a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \dots a_t \\ a_t \dots a_{i+1} \end{pmatrix} \cdot y \;\middle|\; 1 \le i \le t \text{ e } y \in \Sigma_X \right\}$

Lema 2

$x_i = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_i \\ a_i \dots a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} \dots a_t \\ a_t \dots a_{i+1} \end{pmatrix} \notin A_n$ $\forall i$ tal que $1 \le i \le t \iff t \in T_3$.

Teorema 3

Sea $g \in A_n$, entonces $g \not\sim g^{-1}$ en $A_n \iff$ g tiene una descomposición en ciclos disjuntos: $g = (a_{11} \dots a_{1n_1}) \dots (a_{s1} \dots a_{sn_s})$ verificando
1) $n_1 + \dots + n_s \ge n-1$
2) $n_1, \dots, n_s$ son impares $\ne 1$ y distintos entre si.
3) $|\{n_i \mid n_i \in T_3\}|$ es impar.

Corolario 1

Sea $g \in A_n$. Entonces $\chi(g) \in \mathbb{R}$ $\forall \chi \iff$ g no tiene una descomposición cíclica del tipo del teorema 3.

Corolario 2

a) Sea $g = (a_1 \dots a_t) \in A_n$, entonces $g \not\sim g^{-1}$ en $A_n \iff t \ge n-1$ y $t \in T_3$

b) Sea $g = (a_1 a_2 a_3)(b_1 \dots b_t) \in A_n$, entonces $g \not\sim g^{-1}$ en $A_n \iff t \ge n-4$ y $t \notin T_3$.

Como ejemplos numéricos damos los corolarios siguientes:

Corolario 3

Sea $n \ge 5$. Se tiene:

a) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_n$ tal que $o(g) \in \{2,3,4,6,8,10\}$

b) Sea $o(g)=5$. Entonces:
   i) Si $n \ge 7$, $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$.
   ii) Si $n=5$ ó 6 , $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ $\forall \chi$ y $\exists\, \psi \in \mathrm{Irr}(A_n)$ t.q. $\psi(g) \notin \mathbb{Q}$.

c) Sea $o(g)=7$. Entonces $\chi(g) \in \mathbb{Q}_7$ $\forall \chi$, además:
   i) Si $n \ge 9$, $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$.
   ii) Si $n=7$ ó 8, $\exists\, \psi \in \mathrm{Irr}(A_n)$ t.q. $\psi(g) \notin \mathbb{R}$.

d) Sea $g \in A_n$ de orden 9, entonces $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$ excepto los casos: $g = (a_1 a_2 a_3)(b_1 \dots b_9) \in A_n$ con $n=12$ ó 13, en los cuales se tiene: $\chi(g) \in \mathbb{Q}_3$ $\forall \chi$ y $\exists\, \psi \in \mathrm{Irr}(A_n)$ tal que $\psi(g) \notin \mathbb{R}$.

Corolario 4

a) i) $\{o(g) \mid g \in A_5^*\}=\{2,3,5\}$

ii) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_5$ tal que $o(g) \in \{2,3\}$

iii) Si $o(g)=5$ es $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ $\forall \chi$ y $\exists \psi \in Irr(A_5)$ tal que $\psi(g) \notin \mathbb{Q}$.

b) i) $\{o(g) \mid g \in A_6^*\}=\{2,3,4,5\}$

ii) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall g \in A_6$ t.q. $o(g) \in \{2,3,4\}$ y $\forall \chi$.

iii) $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_6$ t.q. $o(g)=5$; además $\exists \psi \in Irr(A_6)$ t.q. $\psi(g) \notin \mathbb{Q}$.

c) i) $\{o(g) \mid g \in A_7^*\}=\{2,3,4,5,6,7\}$

ii) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_7$ t.q. $o(g) \in \{2,3,4,5,6\}$

iii) $\chi(g) \in \mathbb{Q}_7$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_7$ t.q. $o(g)=7$, además $\exists \psi, \overline{\psi} \in Irr(A_7)$ t.q. $\psi(g) \notin \mathbb{R}$.

d) i) $\{o(g) \mid g \in A_8^*\}=\{2,3,4,5,6,7,15\}$

ii) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_8$ t.q. $o(g) \in \{2,3,4,5,6\}$

iii) $\chi(g) \in \mathbb{Q}_7$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_8$ t.q. $o(g)=7$, además $\exists \psi, \overline{\psi} \in Irr(A_8)$ t.q. $\psi(g) \notin \mathbb{R}$.

iv) $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}\ ,i)$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_8$ t.q. $o(g)=15$, además 1) $\exists \psi, \overline{\psi} \in Irr(A_8)$ t.q. $\psi(g) \notin \mathbb{R}$

2) $\exists \zeta \in Irr(A_8)$ t.q. $\zeta(g) \notin \mathbb{Q}_3$.

3) $\exists \theta \in Irr(A_8)$ t.q. $\theta(g) \notin \mathbb{Q}_5$.

e) i) $\{o(g) \mid g \in A_9^*\}=\{2,3,4,5,6,7,9,10,12,15\}=J$

ii) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$ $\forall \chi$ y $\forall g \in A_9$ t.q. $o(g) \in J-\{15\}$.

iii) Si $g \in A_9$ y $o(g)=15$ se obtienen los mismos resultados que en d)(iv) cambiando A_8 por A_9.

Bibliografia

[1] W.R. Scott. " Group Theory" Prentice-Hall. Englewood Cliffs. N, J, 1964.